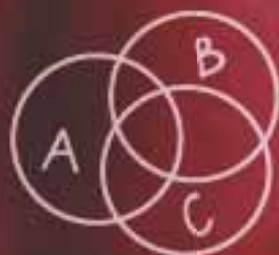
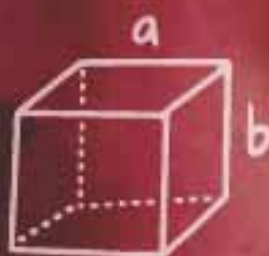


$$P = 6a^2$$



МАТЕМАТИКА

ЗА СЕДМИ РАЗРЕД
ОСНОВНОГ
ОБРАЗОВАЊА

7

УЏБЕНИК

$$3x + 4 = 6x + 1$$

$$3x - 6x = 1 - 4$$

$$-3x = -3$$

$$9^2 = 81$$



Д-р Валентина Гоговска | Снежана Ристовска

МАТЕМАТИКА

ЗА СЕДМИ РАЗРЕД
ОСНОВНОГ
ОБРАЗОВАЊА

7

УЏБЕНИК



Скопје, 2026
(друго издање)

МАТЕМАТИКА 7 за седми разред основног образовања уџбеник
Друго издање, 2026

Издавач:

Друштво за издавачку делатност, производњу, промет и услуге АЛБИ ДОО Скопље, 2026

Уредник:

Елена Стефановска

Автори:

Др Валентина Гоговска
Снежана Ристовска

Превод са македонског на српски:

(„Математика 7 учебник за седмо одделение во основно образование“, АЛБИ 2025)
Зоран Станковић

Језична редакција:

Мелита Станковић

Ликовно и графичко дизајнирање:

Паблик дипломаси Скопље

Штампа:

Бранко Гапо – графичко производство, Скопље 2026

Тираж:

30

Сва права су задржана. Ниједан део ове књиге не сме бити преправљан или преносен у било ком облику или на било који начин, електронски или механички, укључујући фотокопирање, снимање или чување у систему за поновно проналажење без писмене сагласности издавача.

Овај уџбеник је одобрен за употребу у деветогодишњем основном образовању. Одлуком о одобравању и употреби уџбеника за наставни предмет МАТЕМАТИКА за VII разред основног образовања број 26-913/1 од 22.08.2025 године, Министарство просвете и науке Републике Северне Македоније.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(075.2)=163.41

ГОГОВСКА, Валентина

Математика 7 : уџбеник за седми разред основног образовања / [аутори Валентина Гоговска, Снежана Ристовска ; превод са македонског језика Зоран Станковић]. - [2. изд.]. - Скопље : Алби, 2026. - 383 стр. : илустр. ; 27 см

Превод на делото: Математика 7 : учебник за седмо одделение во основно образование

ISBN 978-608-241-079-1

1. Ристовска, Снежана [автор]

COBISS.MK-ID 69149957

УВОД

Драги учениче/драга ученице,

Добродошао/добродошла у авантуру звану математика за седми разред!

Овај уџбеник ће те повести кроз свет бројева, формула и задатака. Можда ти математика понекад делује компликовано, али веруј – уз малотруда и радозналости постаће ти веома занимљива!

Свака лекција је пажљиво осмишљена да те води корак по корак – од подсећања на оно што си већ учио/учила, преко усвајања нових знања, до примене наученог у свакодневним ситуацијама.

Лекције почињу кратким подсетником на оно што већ знаш, затим следе јасна објашњења и шарене илустрације, што је важно за увођење нових знања. Учићеш преко решених примера, занимљивих задатака и ситуација из свакодневног живота – као што су куповина, мерење, игре и путовања.

Чекају те задаци који траже логичко размишљање и креативност кроз стварне животне ситуације, где ћеш видети како се математика користи у свакодневици. Размишљаћеш, истраживаћеш, постављаћеш питања и износити сопствене закључке. Имаћеш могућност да самостално процењујеш своје знање. Тако ћеш знати колико добро напредујеш и шта још треба да вежбаш. Запамти – грешке су део учења, зато се не плаши да их правиш!

Поред тога, имаћеш прилику да користиш и специјализоване образовне софтвере. Они ће ти помоћи да лакше разумеш и увежбаш задатке на нов, интерактиван начин.

Уџбеник ће те припремити и за велике изазове као што су међународна тестирања, где треба да покажеш колико добро умеш да размишљаш и решаваш проблеме.

Математика није само школа – она је начин размишљања и разумевања света. Буди храбар/храбра, постављај питања, истражуј и забављај се док учиш.

Срећно и уживај у математичкој авантури!

Од ауторског тима

Садржај

Тема 1: Бројеви и операције са бројевима

Операције са скуповима.....	9
Својства операција пресека и уније скупова.....	16
Скуп уређених парова.....	21
Цели бројеви. Поређење и уређивање.....	26
Апсолутна вредност.....	31
Сабирање целих бројева са истим или различитим предзнацима.....	36
Својства операције сабирања целих бројева.....	42
Једначине облика $x + a = b$. Одузимање целих бројева.....	46
Множење целих бројева.....	50
Својства операције множење целих бројева.....	55
Дељење целих бројева.....	59
Вредност бројног израза.....	63
Степен са природним бројем као показатељем.....	68
Квадрати и квадратни корени до 100.....	73
Поређење разломака.....	77
Периодични децимални бројеви.....	82
Описивање, рачунање и поређење делова целине помоћу разломака и процената.....	86
Сабирање разломака.....	90
Одузимање разломака.....	94
Множење разломака.....	98
Дељење разломака.....	103
Сабирање и одузимање децималних бројева са различитим бројем децимала.....	108
Множење и дељење децималних бројева.....	112
Веза између размере и дела целине.....	117
Примена правопропорционалности у стварним ситуацијама.....	121

Тема 2: Геометрија

Кружница и круг.....	127
Тангента на кружници.....	133
Графичко сабирање и одузимање дужи.....	136
Конструисање паралелних и нормалних права и симетрале дужи.....	142
Конструкција геометријских елемената помоћу образовног софтвера.....	148
Основни појмови за углове и полуправе.....	152
Мерење, процењивање и цртање углова.....	157
Централни угао.....	162
Операције са угловима.....	168
Графичко сабирање и одузимање углова.....	173
Конструкција симетрале угла и углова од 60° , 30° , 15° , 90° , 45°	177
Трансверзале и паралелне праве.....	182
Конвексни и неконвексни многоуглови.....	186
Основни појмови о троугловима.....	190
Конструкција троуглова.....	194

Конструкција описане и уписане кружнице у троуглу	199
Четвороуглови и класификација према паралелности страница	203
Збир углова у четвороуглу	208
Паралелограм и својства паралелограма	211
Врсте паралелограма и њихова својства	217
Осна симетрија у координатном систему	223
Транслација у координатном систему	228
Ротација многоуглова и примена	233
Представљање 3Д-форми у различитим пројекцијама	237

Тема 3: Алгебра

Основе алгебре. Чланови, изрази и једначине	243
Поједностављивање линеарног изрази. Израчунавање вредности	247
Формуле. Изражавање једне променљиве преко друге	251
Линеарна једначина са једном непознатом	255
Решење једначине	255
Низови целих бројева	259
Презентовање једноставних функција	264
Графички приказ линеарне функције и координатни парови	268
Графици линеарних функција паралелних са x - или y -осом	273

Тема 4: Мерење

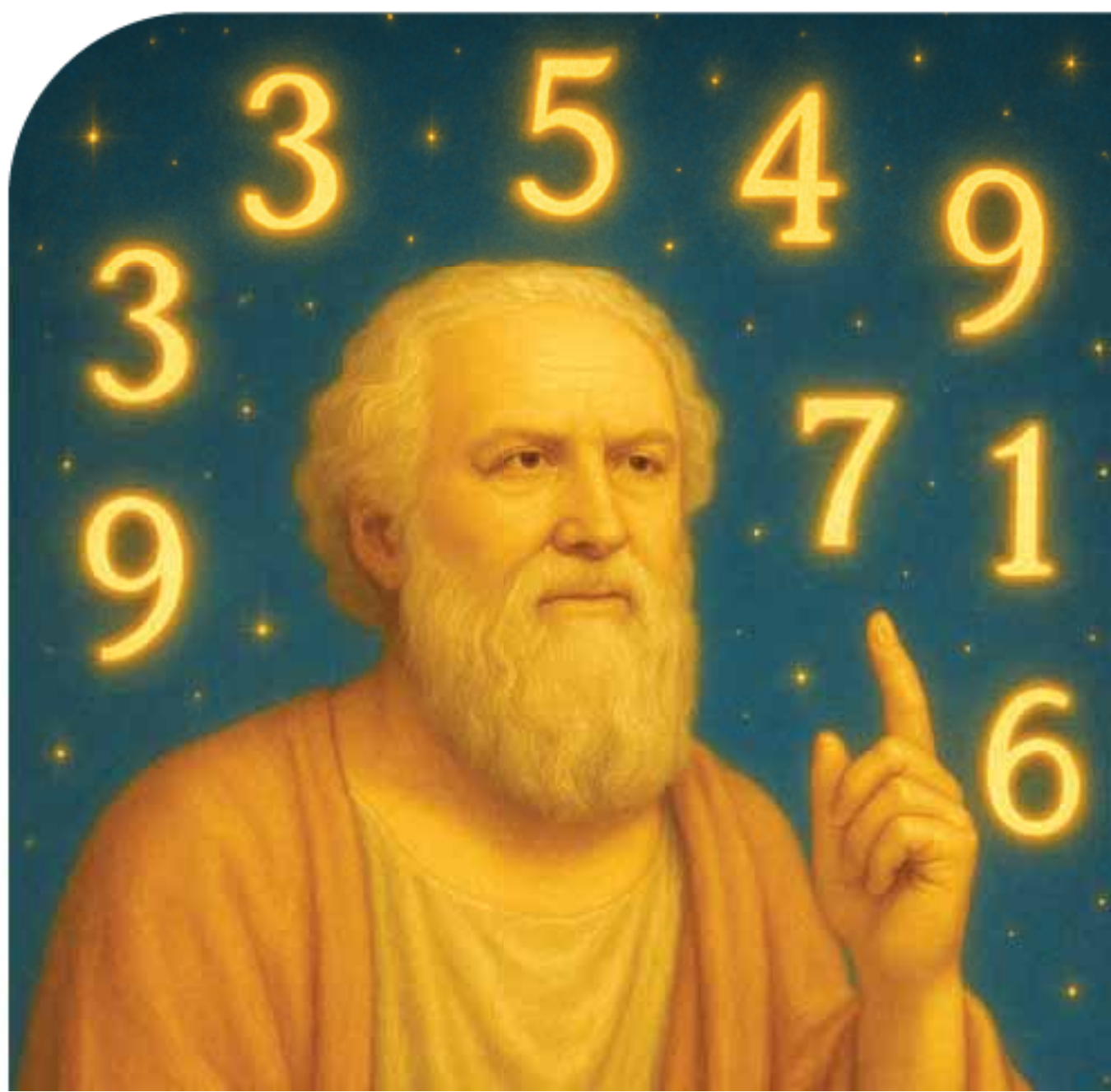
Мерни инструменти за дужину и мерне јединице. Микрон	279
Мерни инструменти за масу и претварање мерних јединица за масу	285
Мерење и мерне јединице за запремину	289
Време. 12-часовни и 24-часовни систем	294
Израчунавање временских интервала и рад са графицима	302
Периметар троугла и четвороугла	310
Површина сложених 2Д-облика	317
Запремина и мерне јединице за запремину	321
Волумен на квадар и на коцка	326
Израчунавање површине коцке и квадрата из њихових мрежа	330

Тема 5: Рад са подацима

Планирање истраживања	337
Прикупљање и организовање података за истраживање	342
Стубичасти и кружни дијаграм	347
Цртање и тумачење линијског дијаграма и пиктограма	353
Модални разред и дијаграм фреквенције за груписане податке	360
Процена и израчунавање аритметичке средине. Поређење два скупа података	366
Исходи. Вероватноћа	373
Експериментална и теоријска вероватноћа	378

Т Е М А
1

БРОЈЕВИ И ОПЕРАЦИЈЕ СА БРОЈЕВИМА



Платонова Академија и магија бројева

У Античкој Грчкој, у Платоновој Академији, број није био само средство за бројање, већ нешто свето, узвишено. Платон и његови ученици веровали су да је све број – сваки део природе, од музике до кретања планета, може се разумети кроз бројеве.

Бројеви, по Платону, нису били само апстракције, већ савршене идеје, вечне и непроменљиве.

Чак и када их не видимо, бројеви постоје. Они симболизују ред, логику и хармонију у природи и у људској мисли.

„Када разумете како се повезују бројеви, математика постаје као мапа која вас води ка решењу.“

Резултати учења

Након проучавања ове теме бићеш у стању да:

- примењујеш операције са скуповима за решавање проблема;
- примењујеш целе бројеве и апсолутну вредност целог броја у свакодневном контексту;
- користиш аритметичке законе и инверзне операције како би поједноставио/ла рачунања са целим бројевима;
- користиш степене са природним бројем као показатељем и квадратни корен природних бројева за решавање проблема;
- користиш везу између разломака, децималних бројева и процената при решавању проблема из свакодневног живота;
- решаваш проблеме из свакодневног живота користећи операције са позитивним рационалним бројевима;
- решаваш проблеме са размером и обрнутом пропорционалношћу.

Операције са скуповима

У овој лекцији ћеш научити како да изводиш различите операције са скуповима, које ће ти помоћи да разумеш како се различите групе елемената могу повезивати или разликовати међусобно. Кроз примере и задатке открићеш како се скупови примењују у математици и у стварном животу, као што су организовање података, анализирање заједничких особина и доношење логичких закључака.



Пример 1

У школском дворишту, ученици из три различита одељења желе да играју различите спортове. Према спорту који играју, распоређени су у следеће скупове:

- Ученици који играју фудбал су елементи скупа A ; $A = \{\text{Ана, Марко, Тина}\}$
- Ученици који играју кошарку су елементи скупа B ; $B = \{\text{Тина, Петар, Мартин}\}$
- Ученици који играју одбојку су елементи скупа C ; $C = \{\text{Ана, Мартин, Лана}\}$

- а) Који ученици припадају скупу A ?
- б) Који ученици припадају скупу B , а не припадају скупу A ?
- в) Који ученици желе да играју и фудбал и кошарку?
- г) Запиши по један подскуп од A и од B .
- д) Који ученици не играју ниједан од ових спортова, ако знамо да су у школском дворишту ученици из следећег скупа: $\{\text{Ана, Марко, Тина, Петар, Мартин, Јана, Лука, Лана}\}$?

Решење:

- а) Ученици који припадају скупу A (који желе да играју фудбал) су: Ана, Марко, Тина. Односно: $\text{Ана} \in A$, $\text{Марко} \in A$ и $\text{Тина} \in A$.
- б) Ученици који припадају скупу B (који желе да играју кошарку) су: Тина, Петар, Мартин. Од тих ученика, они који не припадају скупу A су: Петар и Мартин, тј. $\text{Петар} \notin A$, $\text{Мартин} \notin A$.
- в) Ученик који игра и фудбал и кошарку је само Тина, јер $\text{Тина} \in A$ и $\text{Тина} \in B$.
- г) Подскуп скупа A је $A_1 = \{\text{Тина}\}$, и пишемо $A_1 \subset A$. Подскуп скупа B је $B_1 = \{\text{Тина, Петар}\}$, и пишемо $B_1 \subset B$. Наравно, постоје и други подскупови, али тражен је само по један.
- д) Ученици који не играју ниједан од ових спортова добијају се тако што из скупа свих ученика у дворишту $S = \{\text{Ана, Марко, Тина, Петар, Мартин, Јана, Лука, Лана}\}$ избацимо све који припадају бар једном од скупова A , B или C . Они који не припадају ниједном од та три скупа су: Јана и Лука. Значи, Јана и Лука не играју ниједан од ових спортова.

Задатак 1

Прикажи скупове помоћу Веновог дијаграма:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ и $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Пример 2

За један школски пројекат, ученици су требали да спроведу истраживање како би сазнали колико је велико интересовање за спортске, уметничке и друге ваннаставне активности. Као резултат истраживања добијени су следећи скупови:

Ученици који учествују у спортским активностима:

скуп $A = \{\text{Марија, Лука, Јана, Петар, Тина}\}$

Ученици који учествују у уметничким активностима:

скуп $B = \{\text{Лука, Тина, Стефан, Ана, Јана}\}$

- Који ученици учествују и у спортским и у уметничким активностима?
- Запиши елементе пресека скупова A и B користећи знак за операцију пресека скупова $A \cap B$.
- Прикажи пресек скупова A и B помоћу Веновог дијаграма.

Решење:

- Ученици који учествују и у спортским и у уметничким активностима су: Лука, Јана и Тина. Скупу у коме се налазе ови ученици можемо дати име C : $C = \{\text{Лука, Јана, Тина}\}$. Скуп C је пресек скупова A и B .

Пресек два скупа је скуп сачињен од заједничких елемената та два скупа.

Другим речима, ако су дата два скупа A и B , тада је њихов пресек, означен са $A \cap B$, дефинисан као: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$

- У нашем примеру пресек скупова A и B , користећи знак за операцију пресека скупова $\cap$, записаћемо $A \cap B = C = \{\text{Лука, Јана, Тина}\}$.

- Пресек скупова се приказује Веновим дијаграмом.

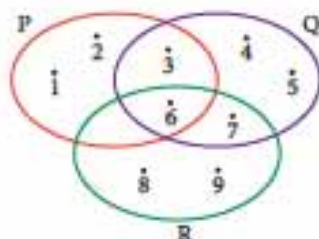


Два скупа A и B која немају заједничке елементе, тј. за која важи $A \cap B = \emptyset$, називају се дисјунктни скупови.

Задатак 2

Користећи дијаграм на коме су са Веновим дијаграмом представљени скупови P , Q и R , запиши елементе следећих скупова:

- а) $P \cap Q$ б) $Q \cap R$ в) $P \cap Q \cap R$



Пример 3

У једној школи ученици се пријављују на различите секције у складу са својим интересовањима.

Дата су два скупа:

Ученици који похађају секцију из математике, скуп $A = \{\text{Марија, Петар, Ана, Јован}\}$

$A = \{\text{Марија, Петар, Ана, Јован}\}$

Ученици који похађају секцију из информатике, скуп $B = \{\text{Јован, Ана, Лука, Елена}\}$

- а) Који ученици су пријављени на бар једну од секција (у A или у B)?
б) Запиши елементе уније скупова A и B користећи ознаку за унију $A \cup B$.
в) Објасни шта представља унија скупова A и B у контексту секција.

Решење:

- а) Ученици који припадају скупу A или скупу B , односно ученици који похађају бар једну од секција, чине нови скуп који можемо означити, на пример, са $D = \{\text{Марија, Петар, Ана, Јован, Лука, Елена}\}$. Овај скуп је унија скупова A и B .

Унија два скупа је скуп састављен од свих елемената оба скупа.
Другим речима, ако су дата два скупа A и B , онда је њихова унија $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

- б) Унија скупова A и B је скуп $D: A \cup B = \{\text{Марија, Петар, Ана, Јован, Лука, Елена}\}$ или $D = A \cup B = \{\text{Марија, Петар, Ана, Јован, Лука, Елена}\}$
в) Унија $A \cup B$ представља скуп свих ученика који похађају бар једну од секција. То значи да ако је неки ученик у секцији за математику, за информатику или у обе, он припада овом скупу.

Задатак 3

Дати су скупови $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, $B = \{13, 14, 15, 16\}$ и $C = \{14, 15, 16, 17, 18\}$.

- а) Прикажи ове скупове помоћу Веновог дијаграма.
б) Одреди и запиши следеће скупове: $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \cup (B \cap C)$.

Задатак 4

У једном супермаркету постоје две врсте попушта:

Производи на попуст ако купиш два иста производа,

скуп $P = \{\text{хлеб, млеко, јогурт, сир}\}$.

Производи на попуст ако користиш картицу за попуст,

скуп $D = \{\text{млеко, сир, кафа, пиринач}\}$.

- Који производи су на попусту ако купиш два иста и ако користиш картицу?
- Који производи су на попусту ако важи бар један од та два услова?
- У чему је разлика између употребе речи „и“ и „или“ у овим питањима?
- Запиши одговоре користећи математичке операције пресек $\cap$ и унију $\cup$.
- Који израз би користио ако желиш да купиш производе који су истовремено на оба попушта?
- Који израз би користио ако желиш да купиш производе који су на бар једном од попушта?

Пример 4

У једној библиотеци постоје две групе књига:

Књиге које су доступне за изнајмљивање, скуп $A = \{\text{„Хари Потер“, „Горски цар“, „Мали принц“, „Алиса у земљи чуда“, „Робинзон Крусо“}\}$.

Књиге које су тренутно изнајмљене, скуп $B = \{\text{„Мали принц“, „Алиса у земљи чуда“, „Робинзон Крусо“}\}$.

- Које књиге су доступне за изнајмљивање, али у овом тренутку нису изнајмљене?
- Како се то може математички записати као разлика скупова?
- Како се то може представити Веновим дијаграмом?
- Како би ову разлику описао речима?

Решење:

- Књиге које су доступне, али нису изнајмљене су оне које припадају скупу A , али не припадају скупу B , односно скуп: $\{\text{„Хари Потер“, „Цар шума“}\}$.
Овај скуп назива се разлика скупова A и B .

Скуп свих елемената који припадају скупу A , а не припадају скупу B , назива се разлика скупа A са скупом B . Другим речима, ако су дата два скупа A и B , онда је њихова разлика, означена као $A \setminus B$, дефинисана као:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

б) Математички запис:

$$A \setminus B = \{ \text{„Хари Потер“, „Горски цар“} \}$$

в) На датом дијаграму разлика скупова $A \setminus B$ представљена је обојеним делом Веновог дијаграма

г) Разлика $A \setminus B$ представља књиге које библиотека има на располагању, али које тренутно нису извајмљене.



Задатак 5

Дата су два скупа: $M = \{x \mid x \text{ је двоцифрен природан број} \}$ и $N = \{12, 14, 16, 18\}$

а) Представи скупове Веновим дијаграмом.

б) Одреди и запиши следеће скупове: $M \setminus N$, $N \setminus M$, $M \cup N$

Пример 5

Ана, Боби и Калина планирају активности за викенд.

Сваки од њих има различите идеје о томе шта жели да ради.

Активности које Ана жели да ради: $A = \{\text{планинарење, биоскоп, вожња бицикла, трчање}\}$

Активности које жели Боби: $B = \{\text{видео игре, биоскоп, кошарка, вожња бицикла}\}$

Активности које жели Калина: $C = \{\text{планинарење, пливање, биоскоп, јога}\}$

Помози им да одлуче шта могу да раде заједно,

а које активности ће морати да ради свако појединачно.

- а) Које активности могу да раде сви троје заједно?
- б) Које активности могу да раде бар двоје од њих?
- в) Које активности могу да се изаберу ако важи бар један од предлога?
- г) Које активности жели Ана, али не жели Боби?
- д) Како ово можемо представити Веновим дијаграмом?



Решење:

а) Активности које сви троје могу да раде: $A \cap B \cap C = \{\text{биоскоп}\}$

б)* Активности које могу да раде бар двоје:

• За Ану и Бобија: $A \cap B = \{\text{биоскоп, вожња бицикла}\}$

• За Ану и Калину: $A \cap C = \{\text{планинарење, биоскоп}\}$

• За Бобија и Калину: $B \cap C = \{\text{биоскоп}\}$

Унија ових скупова:

$$S \cup D \cup E = \{\text{биоскоп, вожња бицикла, планинарење}\}.$$

- в) Активности које жели бар један од њих:
 $A \cup B \cup C = \{\text{планинарење, биоскоп, вожња бицикла, трчање, видео игре, кошарка, пливање, јога}\}.$
- г) Активности које жели Ана, али не жели Боби:
 $A \setminus B = \{\text{планинарење, трчање}\}$
- д) Венов дијаграм је приказан на цртежу.



Задатак 6

Један турист планира путовање и има три могуће опције за превоз:

1. Превозна средства која су брза, скуп $A = \{\text{авион, воз}\}$
2. Превозна средства која су јефтина, скуп $B = \{\text{аутобус, воз}\}$
3. Превозна средства која су удобна, скуп $C = \{\text{авион, воз, брод}\}$
 - а) Која превозна средства су и брза и јефтина?
 - б) Која превозна средства су брза или удобна?
 - в) Која превозна средства припадају свим трима скуповима?
 - г) Како можеш да прикажеш овај избор Веновим дијаграмом?

Да ли можеш да наведеш пример из свакодневног живота у ком користиш операције над скуповима ($\cap$, $\cup$) приликом доношења одлука? Објасни како их примењујеш.

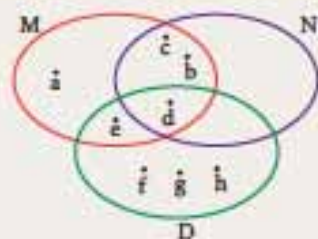
Направи мисаону мапу за све што знаш о скуповима и операцијама над скуповима. Пример мисаоне мапе за појам троугао дат је на цртежу:



Самосталан рад

1. Нацртан је Венов дијаграм са skupовима M , N и D .

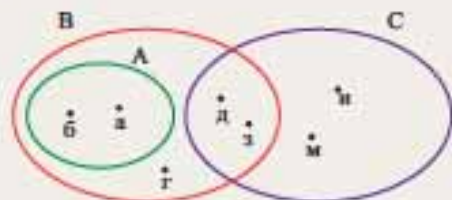
- Запиши skupове M , N и D у табеларном облику:
- Одреди пресек: $M \cap N$, $N \cap D$, $M \cap D$
- Одреди унију: $M \cup N$, $N \cup D$, $M \cup D$
- Одреди разлике: $M \setminus N$, $N \setminus D$, $M \setminus D$



2. Дати су skupови: $M = \{10, 12, 14, 16\}$, $N = \{9, 10, 11, 12, 13\}$. Одреди који од следећих skupова $\{9, 10, 11, 12, 14, 16\}$, $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$, $\{10, 12\}$, $\{14, 16\}$, $\{14, 16, 9, 13\}$, $\{9, 11, 13\}$, представља пресек, унију и разлику skupова M и N .

3. На цртежу је дат Венов дијаграм за A , B и C . Запиши skupове у табеларном облику:

- A , B и C
- $B \cap C$, $A \cap B$, $B \cap \emptyset$
- $B \cup C$, $A \cup C$
- $A \setminus B$, $B \setminus C$, $A \setminus C$



4. Прикажи skupове $A = \{1, 4, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 7, 8, 9\}$ Веновим дијаграмом.

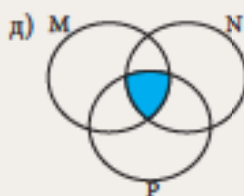
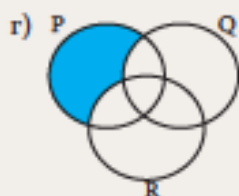
5. Дати су skupови: $M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, $N = \{x \mid x \in N \text{ и } 6 \leq x \leq 11\}$ и $P = \{x \mid x \in N \text{ и } 3 < x \leq 11\}$. Одреди:

- $M \cap N$, $N \cap P$, $P \cap M$
- $M \cup N$, $N \cup P$, $P \cup M$

6. Шта представљају елементи skupa $A \cap B$, ако је A skup свих девојчица у твом одељењу, а B skup свих ученика седмог разреда у школи?

7. Skupове $A = \{x \mid x \in N \text{ и } x < 7\}$ и $B = \{x \mid x \in N \text{ и } x \text{ је број из прве десетице}\}$ прикажи табеларно и Веновим дијаграмом. Затим одреди разлике $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

8. На цртежу су дати skupови приказани Веновим дијаграмом. Које операције су представљене обојеним деловима?

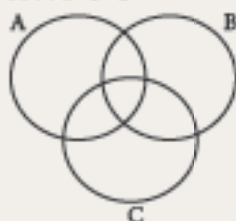


9. Прецртај сваки дијаграм у свеску, а затим обој део који одговара следећим операцијама:

а) $A \cap B$



б) $A \cap B \cup C$



в) $(A \cup B) \setminus (B \cup A)$



г) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Својства операција пресека и уније скупова

При раду са скуповима, важно је да се разумеју и користе одређена својства операција уније и пресека. У овој лекцији ћеш научити која су основна својства ових операција, као што су комутативно и асоцијативно својство. Ова својства ће ти омогућити да препознаш и поједноставиш изразе са скуповима.

Кроз примере и задатке ћеш увидети како ти ова својства помажу у логичком размишљању и решавању проблема везаних за скупове.

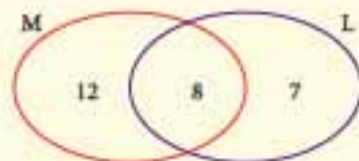
Пример 1

У једној школи 20 ученика похађа часове математике (скуп M), а 15 ученика похађа часове информатике (скуп I). Од тога, 8 ученика похађа и математику и информатику. Колико ученика похађа само један од та два предмета?



Решење:

Да бисмо одредили колико ученика похађа наставу из само једног предмета (број елемената у скупу $(M \setminus L) \cup (L \setminus M)$), треба да нађемо колико елемената ће садржати унија скупова ученика који су похађали часове само из математике и скупа ученика који су похађали часове само из информатике. Када од укупног броја ученика који похађају часове из математике одузмемо број оних ученика који похађају оба предмета, добићемо колико њих похађа само часове из математике, тј. $20 - 8 = 12$. То значи да 12 ученика похађа само часове из математике. Када од броја оних који похађају часове из информатике одузмемо број ученика који су похађали оба предмета, добићемо колико ученика похађа само часове из информатике, тј. $15 - 8 = 7$. Број елемената уније биће збир броја елемената у два скупа (скупови су дисјунктни), односно $20 - 8 + 15 - 8 = 19$ ($12 + 7 = 19$).
Дакле, укупно 19 ученика похађа само један од два предмета.



За пресек и унију два скупа важи комуникативно својство, односно: ако су A и B два дата скупа, тада важи $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$.

Пример 2

Дати су скупови $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Одреди скупове:

- а) $A \cap B$ и $B \cap A$ б) $A \cup B$ и $B \cup A$

Решење:

Због прегледности користимо Венов дијаграм.

- а) $A \cap B = \{2, 3\}$, $B \cap A = \{2, 3\}$. Пошто је $\{2, 3\} = \{2, 3\}$,
слиеди да $A \cap B = B \cap A$.
б) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Пошто су скупови једнаки, слиеди
 $A \cup B = B \cup A$.



За пресек и унију скупова важи асоцијативно својство, односно ако су A , B и C три дата скупа, тада важи $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ и $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Пример 3

Дати су скупови $M = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, $N = \{13, 14, 15, 16\}$, $P = \{13, 15, 17, 19\}$.

Одреди и запиши скупове:

- а) $(M \cap N) \cap P$ и $M \cap (N \cap P)$ б) $(M \cup N) \cup P$ и $M \cup (N \cup P)$

Решење:

Због боље прегледности, скупови M , N и P су приказани Веновим дијаграмом.



$$\begin{aligned} \text{а) } (M \cap N) \cap P &= \{13, 14, 15\} \cap \{13, 15, 17, 19\} = \{13, 15\} \\ \text{и } M \cap (N \cap P) &= \{11, 12, 13, 14, 15\} \cap \{13, 15\} = \{13, 15\}. \\ \text{Добили смо } (M \cap N) \cap P &= M \cap (N \cap P). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } (M \cup N) \cup P &= \{11, 12, 13, 14, 15, 16\} \cup \{13, 15, 17, 19\} = \\ &= \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19\} \text{ и} \\ M \cup (N \cup P) &= \{11, 12, 13, 14, 15\} \cup \{13, 14, 15, 16, 17, 19\} = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19\} \\ \text{Добили смо } (M \cup N) \cup P &= M \cup (N \cup P). \end{aligned}$$

Задатак 1

Дати су скупови $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{b, c, d, e, f\}$. Провери да ли је $A \setminus B = B \setminus A$.

Задатак 2

Провери на примерима да ли важи: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

Пример 4

Један ресторан нуди три врсте менија за доручак:

мени A : $A = \{\text{омлет, тост, кафа}\}$, мени B : $B = \{\text{палачинке, кафа, сок}\}$

мени C : $C = \{\text{сендвич, кафа, јогурт}\}$

- а) Покажи да је унија менија комуникативна, тј. $A \cup B = B \cup A$.
 б) Покажи да је унија асоцијативна, тј. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Решење:

- а) Комуникативност уније:

$A \cup B = \{\text{омлет, тост, кафа, палачинке, сок}\}$, $B \cup A = \{\text{палачинке, сок, кафа, омлет, тост}\}$.
 Пошто скупови садрже исте елементе (редослед није битан), закључујемо $A \cup B = B \cup A$.

- б) Асоцијативност уније:

Најпре $A \cup B = \{\text{омлет, тост, кафа, палачинке, сок}\}$,
 затим $(A \cup B) \cup C = \{\text{омлет, тост, кафа, палачинке, сок, сендвич, јогурт}\}$.

Сада рачунамо $B \cup C = \{\text{палачинке, сок, кафа, сендвич, јогурт}\}$ па
 $A \cup (B \cup C) = \{\text{омлет, тост, кафа, палачинке, сок, сендвич, јогурт}\}$.

Пошто су резултати исти, важи $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Ово значи да, без обзира на то како групишемо меније, коначан списак јела које ресторан нуди остаје исти.

Пример 4 нам показује како се својства уније могу применити у свакодневним ситуацијама, као што су избор менија, листе производа у продавницама или организовање различитих група предмета.

Задатак 3

У једној компанији постоје три сектора који користе различите софтвере за рад:
финансијски сектор (F): Excel, SAP и QuickBooks;
сектор за људске ресурсе (H): SAP, BambooHR и Trello;
маркетинг сектор (M): Trello, Google Ads и Canva.

- Провери комутативно и асоцијативно својство пресека сектора (на пример: $F \cap H = H \cap F$)
- Провери асоцијативно својство уније сектора, односно: $(F \cup H) \cup M = F \cup (H \cup M)$
- Практично анализирај шта значе ова својства у односу на компанију и њену организацију.

Компанија жели да смањи трошкове за софтвер и одлучује да задржи само оне програме који се користе у најмање два од три сектора (финансије, људски ресурси, маркетинг). Како би искористио својства пресека и уније да одредиш списак софтвера који треба да остане у употреби? Да ли редослед груписања сектора утиче на коначан избор софтвера? Објасни зашто.

Објасни у својој свесци:

- Зашто је пресек комутативан, а и унија?
- Зашто је унија асоцијативна?
- Како ова својства могу помоћи у стварним ситуацијама?



Ако одговориш и објасниш сва три питања — ти си мајстор за скупове!



Ако имаш недоумице — врати се на делове који су ти нејасни и покушај поново!

Самосталан рад

1. Дати су скупови A, B, C:

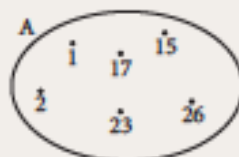
$$B = \{3, 6, 9, \dots\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 3 \leq x \leq 12\} \text{ и } D = \emptyset.$$

Пронађи једнаке скупове под: а, б, в, г, д, ђ, е, ж, з.

а) $A \cap B$ б) $A \cap C$ в) $B \cap C$ г) $C \cap A$ д) $C \cap B$

ђ) $B \cap A$ е) $C \cap C$ ж) $A \cap D$ з) $D \cap D$



2. Дати су скупови A, B, C и D.

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 7\}, C = \{0, 2, 4, 6, 8\} \text{ и } D = \{1, 2, 5, 8\}$$

Докажи да су тачне следеће једнакости:

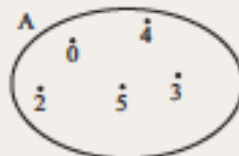
а) $A \cap B = B \cap A$ б) $A \cap C = C \cap A$ в) $B \cap C = C \cap B$

г) $D \cap B = B \cap D$ д) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ђ) $(B \cap D) \cap A = B \cap (D \cap A)$ е) $(C \cap B) \cap D = C \cap (B \cap D)$

ж) $A \cap A = A$ з) $B \cap B = B$ с) $C = \emptyset$

Која својства операције пресек су изражена у једнакостима а, б, в, г, д, ђ, е?



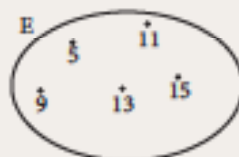
3. Дати су скупови:
- $A = \{x \mid x \text{ је паран број}\}$
- .

$$B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}, C = \{4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$D = \{x \mid x \text{ је паран број мањи од } 10\}.$$
 Одредити:

а) $A \cup B$ б) $A \cup D$ в) $C \cup D$ г) $C \cup E$ д) $D \cup E$

ђ) $D \cup C$ е) $B \cup A$ ж) $E \cup D$ з) $C \cup C$ с) $\{1, 2, 4\} \cup C$



4. Дати су скупови:

 $A = \{0, 3, 5, 7, 12, 14\}$, $B = \{x \mid x + 5 = 7 \text{ или } x - 5 = 7\}$, C = скуп природних бројева мањих од 5 док је скуп D дат Веновим дијаграмом. Докажи да су тачне следеће једнакости:

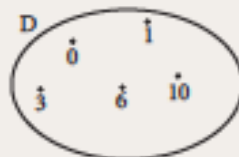
а) $A \cup B = B \cup A$ б) $B \cup C = C \cup B$ в) $B \cup D = D \cup B$

г) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ д) $B \cup (C \cup D) = (B \cup C) \cup D$

ђ) $(A \cup B) \cup (C \cup D) = (A \cup C) \cup (B \cup D)$ е) $A \cup A = A$

ж) $B \cup B = B$ з) $C \cup \emptyset = C$ с) $A \cup (B \cup A) = A \cup B$

Која својства операције унија су изражена у једнакостима: а, б, в, г, д?



5. Да ли су тачне следеће једнакости? Објасни свој одговор.

а) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \cap C$ б) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

в) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- 6.* Дати су скупови:
- $A = \{4\}$
- ,
- $B = \{\{4\}\}$
- . Одредити а)
- $A \cup B$
- б)
- $M = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
- .

- 7.* Нађи унију скупова:
- $A = \{x \mid x \in \{1\}\}$
- ,
- $B = \{x \mid x \in \{1, 2\}\}$
- .

Скуп уређених парова

У овој лекцији ћеш се фокусирати на важне појмове повезане са уређеним паровима и двочланим скуповима. Током лекције научићеш како да разликујеш уређене парове од двочланих скупова, и како да одредиш скуп уређених парова неког датог скупа. Уз интерактивне примере и задатке уверићеш се да ти појмови постају јасни и применљиви.



Пример 1

Дат је скуп $M = \{1, 2, 3\}$.

Запиши све двочлане подскупове скупа M .

Решење:

Двочлани подскупови скупа M су: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ и $C = \{2, 3\}$.

Да ли су скупови $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ једнаки? Објасни зашто.

Задатак 1

Маја има карту за концерт на којој пише ред 5, седиште 12, а на Илировој карти пише ред 12, седиште 5. Да ли Маја и Илир имају исто место за седење? Да ли за њихове карте можемо записати $\{5, 12\}$ и $\{12, 5\}$? Објасни свој одговор.

Пример 2

Размисли о разлици између записа скупа $A = \{5, 12\}$ и записа координата тачке $B(5, 12)$. Објасни зашто ти записи нису исти и наведи примере.

Решење:

Запис $A = \{5, 12\}$ представља скуп који садржи два елемента: 5 и 12. У скупу редослед није битан, што значи да је $\{5, 12\}$ исто што и $\{12, 5\}$. С друге стране, тачка $B(5, 12)$ представља позицију у координатној равни, где је x -координата 5, а y -координата 12. Тачка $B'(12, 5)$ представља другу позицију у координатној равни, где је $x = 12$, а $y = 5$. Дакле, тачке B и B' су различите. Јасно је да $\{5, 12\}$ и $(5, 12)$ нису исто. За разлику од скупа, код записа $(5, 12)$ редослед је важан — $(5, 12) \neq (12, 5)$. За овакав запис користимо појам уређени пар. Шта је уређени пар?

Уређени пар елемената је пар од два елемента код кога се тачно зна који је први, а који други елемент.

Уређени пар два елемента a и b , где је a први, а b други елемент, записује се у облику (a, b) . У таквом запису a је први елемент или прва компонента, а b је други елемент или друга компонента.

Задатак 2

Да ли су уређени парови $(1, 2)$ и $(2, 1)$ једнаки? Објасни свој одговор. Када су два уређена пара једнака?

Два уређена пара (a, b) и (c, d) су једнака ако и само ако $a = c$ и $b = d$.

У уређеном пару (a, b) дозвољено је $a = b$, односно и (a, a) је уређен пар.

Уређени пар (a, b) за $a \neq b$ није исто што и скуп $\{a, b\}$, а уређени пар (a, a) није исто што и скуп $\{a\}$.

Задатак 3

Напиши примере уређених парова из свакодневног живота.

Пример 3

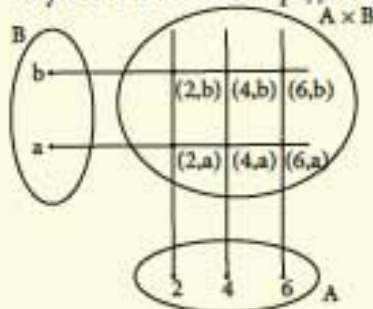
Дата су два скупа: $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{a, b\}$. Запиши скуп чији су елементи сви уређени парови такви да је први елемент из скупа A , а други из скупа B .

Решење:

Сваки елемент скупа A комбинујемо са сваким елементом скупа B . Када је први елемент 2, добијамо парове: $(2, a)$ и $(2, b)$. Када је први елемент 4, добијамо: $(4, a)$ и $(4, b)$. Када је први елемент 6, добијамо: $(6, a)$ и $(6, b)$. Скуп уређених парова је: $P = \{(2, a), (2, b), (4, a), (4, b), (6, a), (6, b)\}$. Овај скуп означава се са $A \times B$ и зове се Декартов производ скупова A и B . Запис $P = \{(2, a), (2, b), (4, a), (4, b), (6, a), (6, b)\}$ представља табеларни запис Декартовог производа скупова A и B .

За било која два скупа A и B , скуп свих уређених парова у којима је прва компонента из скупа A , а друга из скупа B , назива се Декартов производ скупова A и B и записује се: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$

Скуп $A \times B$ се често представља Декартовом шемом приказаном на цртежу.



Пример 4

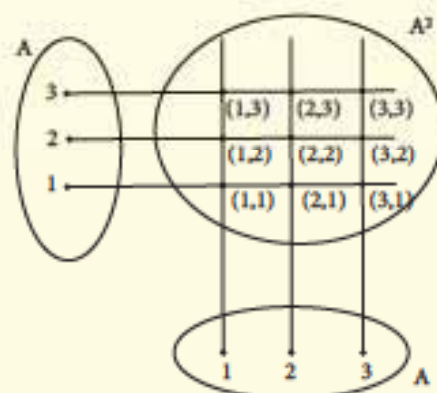
Дато је скуп $A = \{1, 2, 3\}$. Одреди све уређене парове који се могу саставити од елемената овог скупа.

Решење:

Да бисмо саставили уређене парове из скупа A , комбинујемо елементе у парове, при чему је редослед елемената важан.

Уређени парови елемената 1, 2, 3 су: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3).

Значи, скуп уређених парова P можемо записати као: $P = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ Декартов производ $A \times A$ се често назива Декартов квадрат и означава се са A^2 , односно: $A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in A\}$. Декартов квадрат се може представити и Декартовом шемом, као на цртежу.



Задатак 4

Дати су скупови $K = \{21, 22, 23\}$ и $L = \{m, n, p, q\}$. Одреди Картежијев производ $K \times L$:

- а) табеларно б) Декартовом шемом

Задатак 5

Нађи $A \times \emptyset$ за произвољан скуп A . Објасни свој одговор.

Задатак 6

Табеларно је дат Декартов производ скупова A и B :

$A \times B = \{(7, 2), (7, 4), (7, 6), (9, 2), (9, 4), (9, 6)\}$. Одреди скупове A и B табеларно.

Пример 5

У оквиру пројекта за одрживи развој, ученице седмог разреда одлучиле су да направе план за организовање локалне изложбе еколошких производа. У ту сврху желе да истраже различите категорије производа и њихове особине. На пример:

скуп производа: $A = \{\text{храна, одећа, играчке}\}$.

скуп материјала: $B = \{\text{пластика, дрво, текстил}\}$.

Ученици треба да одреде $A \times B$ и да га прикажу Декартовом шемом, како би се додатно објаснило значење уређених парова у контексту еколошке свести.

Решење:

Да би формирали уређене парове, ученици треба да комбинују сваки тип производа са сваким материјалом. На пример, уређени парови са храном као првим елементом:

(храна, пластика) — пластична амбалажа за паковање хране;

(храна, дрво) — дрвене кутије за храну;

(храна, текстил) — текстилне врећице за храну.

Уређени парови са одећом као првим елементом:

(одећа, пластика) — израда пластичних тканина;

(одећа, дрво) — дрвени модни украси за одећу;

(одећа, текстил) — одећа од рециклираног текстила.

Уређени парови са играчкама:

(играчке, пластика) — пластичне играчке;

(играчке, дрво) — дрвене играчке;

(играчке, текстил) — текстилне играчке.

Запис Декартовог производа $A \times B$ је: $A \times B = \{(\text{храна, пластика}), (\text{храна, дрво}),$

$(\text{храна, текстил}), (\text{одећа, пластика}), (\text{одећа, дрво}), (\text{одећа, текстил}), (\text{играчке, пластика}),$

$(\text{играчке, дрво}), (\text{играчке, текстил})\}$.

Може се размислити о значају сваког пара. На пример, пар (храна, пластика) може се сматрати проблематичним јер је пластична амбалажа штетна за животну средину.

Шта можемо рећи о пару (одећа, текстил) или (играчке, дрво)?

Задатак 7

У лабораторији, Мехмед испитује различите комбинације температура и времена загревања воде. Тако имамо два скупа:

Скуп А: температуре у степенима Целзијуса $\rightarrow \{10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}\}$

Скуп В: времена загревања у минутима $\rightarrow \{5 \text{ min}, 10 \text{ min}, 15 \text{ min}\}$

- Запиши Декартов производ скупа А и скупа В.
- Који парови температуре и времена дају најбољи резултат за загревање воде?
(више температуре и дуже време загревања су повољнији за боље загревање воде)

Како можеш да примениш концепте уређених парова и Декартовог производа у стварном животу, посебно у ситуацијама када треба да комбинујеш различите опције, као што су избор гардеробе, планирање obroка или организовање догађаја? Објасни преко примера какве предности може имати коришћење ових математичких концепата у свакодневном доношењу одлука.

У своју свеску нацртај круг. У круг упиши: „Моје знање о уређеним паровима и Декартовом производу“. Оцени свој рад бојама:

- Зелена боја: Одлично сам разумео/ла и могу самостално да применим научено.
 - Жута боја: Имам основно знање, али ми треба још вежбе.
 - Црвена боја: Нисам сигуран/на у своје знање и потребан ми је додатан рад.
- Листа питања: Испод круга напиши 2–3 питања на која желиш да добијеш одговор или теме које желиш детаљније да истражиш.

Самосталан рад

1. Дати су скупови: $A = \{a, b\}$, $B = \{a, 6, 7\}$.

Прикажи табеларно следеће Декартове производе:

- а) $A \times B$ б) $B \times A$ в) $A \times A$ г) $B \times B$
 д) $(A \cap B) \times B$ е) $(B \setminus A) \times A$ ж) $A \times \emptyset$

2. Од којих скупова су добијени следећи Декартови производи:

- а) $\{(2, 1), (2, 3), (5, 1), (5, 3)\}$ б) $\{(5, x), (x, 5), (5, 5), (x, x)\}$

3. Дати су скупови: $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{3, 5\}$. Прикажи табеларно следеће скупове

- а) $B \times A$ б) $A \times A$

- 4.* Дати су скупови: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ и } 0 < x < 4\}$ и $B = \{y \mid y \in \mathbb{N} \text{ и } 5 \leq y \leq 6\}$.

Прикажи табеларно и нацртај Декартове шеме за следеће скупове:

- а) $P = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ и } x = y\}$, $M = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ и } x + y = 6\}$,
 $S = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ и } y - x = 2\}$

- б) Одреди скупове: $M \cap S$, $M \setminus S$, $M \cup S$ и $M \setminus (P \cup S)$.

5. Дати су скупови: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{x \in A \mid x + 2 = 4\} = \{2\}$

- а) Прикажи следеће скупове табеларно и Декартовом шемом: $A \times B$, $B \times A$, B^2
 б) Да ли важи: $A \times B = B \times A$?

6. а) Запиши сва подмножества скупа $\{(a, 5), (7, x), (4, 0)\}$.

- б) Нађи сва двочлана подскупа скупа $\{(1, x), (2, z), (y, x)\}$.

Цели бројеви. Поређење и уређивање

У свакодневном животу често користиш бројеве да измериш или опишеш различите количине. Природне бројеве најчешће користимо за бројање предмета, а разломке и децималне бројеве да изразимо делове целине (на пример, пола хлеба или четвртина килограма шећера). Међутим, постоје ситуације у којима ови бројеви нису довољни да опишу појаве око нас. На пример, када температура зими падне испод нуле, када неко дугује новац или када се израчунавају промене у висини изнад и испод нивоа мора. У таквим случајевима потребни су бројеви који могу да представе губитак, недостатак или „кретање“ у супротном смеру. Тако у математици уводимо целе бројеве. Њима можемо прецизније да опишемо и разумемо различите концепте у математици и у реалном животу.



Пример 1

- Запиши табеларно скуп целих бројева.
- Одреди подскуп скупа Z чији су елементи позитивни цели бројеви.
- Одреди подскуп скупа Z чији су елементи негативни цели бројеви.
- Какав је однос између скупова N , N_0 , Z^+ , Z^- и Z ?

Решење:

- Елементи скупа целих бројева су: природни бројеви, њихови супротни бројеви и нула, односно

$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$
- $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $Z^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$
- Везе између N , N_0 , Z^+ , Z^- и Z могу да се прикажу и са операцијама између скупова. На пример, $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$, $Z^+ = N$, $Z^+ \cup \{0\} = N_0$, $Z^+ \cap Z^- = \emptyset$, $Z \setminus Z^- = N_0$

Задатак 1

Одреди следеће скупове:

- $Z^+ \setminus N$;
- $Z^+ \cap N$;
- $Z^+ \cap Z^-$;
- $Z \setminus N$;
- $Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$
- $\{0\} \cup Z^+$.

Задатак 2

Почевши од најмањег, поређај следеће бројеве: 11, -15, -34, 15, -11, 0, 20, -20 и прикажи их на бројевној правој.

За $a, b \in \mathbb{Z}$ кажемо да је a већи од b (или b мањи од a), (пишемо $a > b$ или $b < a$) ако је тачка $A(a)$ десно од тачке $B(b)$ на бројној правој.

Пример 2

ако математички записујемо реченицу: „Температура је најмање -3°C “?

Решење:

Ако кажемо: „Температура је најмање -3°C “, то значи да температура може бити -3°C или већа. Математички се то записује као $T \geq -3$.

Израз „најмање“ значи да је то најнижа могућа вредност, али вредност може бити и већа. Користимо знак $\geq$ („веће или једнако“) јер температура може да буде -3°C или било који већи број (на пример, 0°C , 5°C , 10°C итд.).

Сличан пример: Ако кажемо: „Температура је највише 10°C “, то значи да она може бити 10°C или мање, па записујемо $T \leq 10$.

За $a, b \in \mathbb{Z}$, ако је $a = b$ или $a > b$, пишемо $a \geq b$.

За $a, b \in \mathbb{Z}$, ако је $a = b$ или $a < b$, пишемо $a \leq b$.

Пример 3

Искористи знакове $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ да запишеш односе између бројева:

- а) 2 и 3 б) -4 и -3

Решење:

Тачно је да је $3 > 2$, али такође важи и $3 \geq 2$ и $3 \geq 3$,

Тачно је да је $-4 < -3$, али и $-4 \leq -3$ и $-4 \leq -4$.

Задатак 3

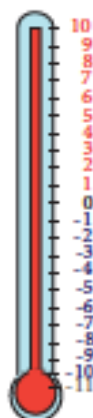
На бројевној правој:

- а) Црвеном бојом означи три тачке чије су координате мање или једнаке од -3.
б) Плавом бојом означи три тачке чије координате нису мање од 2.
в) Зеленом бојом означи три тачке чије су координате веће или једнаке од 2.
Шта запажаш?

Пример 5

Температурата во различни градови е:

- У Скопљу температура је 5°C
- У Тирани температура је 2°C
- У Подгорици температура је -3°C
- У Сарајеву температура је -5°C
- У Београду температура је 0°C
- У Загребу температура је -3°C
- У Атини температура је 5°C



- а) Који град има највишу температуру?
- б) Који град има најнижу температуру?
- в) Колика је разлика у температури између Скопља и Сарајева?
- г) Колико градова има негативну температуру?
- д) Поредај температуре свих градова користећи знак $\leq$. По ком редоследу су бројеви записани (растућем или опадајућем)?

Решење:

- а) Највиша температура је у Скопљу и Атини, 5°C .
- б) Најнижа температура је у Сарајеву, -5°C .
- в) Разлика у температури је 10°C . Објашњење: $5 - (-5) = 10$.
- г) Негативну температуру имају Подгорица (-3°C), Сарајево (-5°C) и Загреб (-3°C)
- д) Температуре поређане у растућем редоследу: $-5 \leq -3 \leq -3 \leq 0 \leq 2 \leq 5 \leq 5$.
Редослед је растући.

Задатак 4

Марко и његови пријатељи договорили су се да помогну својим другарима да прикупе новац за спортску опрему. Сваки од њих има различит износ дуга и приход:

- Марко има дуг од 50 динара, приход од 100 динара
 - Ана има дуг од 30 динара, приход од 80 динара.
 - Никола има дуг од 20 динара, приход од 120 динара.
 - Теа има дуг од 40 динара, приход од 90 динара.
 - Фатима има дуг од 10 динара, приход од 70 динара.
- а) Користећи целе бројеве, запиши дуг и приход Марка и сваког његовог пријатеља. Поређај добијене целе бројеве у опадајућем редоследу.
 - б) Ко од њих има највећи дуг?
 - в) Ко има највећи приход?
 - г) Ко има највећу разлику између прихода и дуга?
 - д) Запиши укупан дуг свих пријатеља као негативан цео број.

Како можемо користити целе бројеве у свакодневном животу? Да ли можеш да наведеш примере из свог данашњег дана када си се сусрео/сусрела са позитивним и негативним целим бројевима, као и са ситуацијама у којима си вршио/вршила поређење целих бројева?

У својој свесци, одговори на следећа питања:

1. Да ли разумем шта су цели бројеви и како се деле на позитивне, негативне и нулу? Да/Не
2. Могу ли самостално да запишем позитивне и негативне целе бројеве? Да/Не
3. Могу ли да наведем примере из свакодневног живота у којима се користе цели бројеви? Да/Не
4. Да ли умет да објасним везу између скупова N , N_0 , Z^+ , Z^- и Z ? Да/Не
5. Након што одговориш на питања, напиши кратак коментар у свеску: шта ти је било најтеже, а шта ти најбоље иде.

Самосталан рад

1. Запиши 12°C изнад нуле и 15°C испод нуле.
2. Одреди скупове:
 - а) $Z^+ \setminus Z$
 - б) $Z^+ \cap Z$
 - в) $Z^+ \cap Z^-$
 - г) $Z \setminus N$
 - д) $Z \setminus ((0) \cup Z^+)$
 - е) $\{0\} \cup Z^+$
3. Температура измерена једног летњег дана била је 32°C , а затим се променила за 3°C . Колика је температура била након тога? Објасни одговор користећи бројевну праву.
4. Поређај бројеве: $2, -5, -1, 0, 9, -100$ почевши од најмањег.
5. Користећи симболе $\in$ и $\notin$, запиши који елементи скупа $\{2; -1; 3\frac{1}{2}; 0; -55; 3, 01; \frac{4}{2}\}$ припадају, а који не припадају скупу Z (целим бројевима).
6. Дат је скуп $A = \{2, -6, 8, 12, 0, -10\}$. Запиши табеларно:
 $B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ позитиван цео број}\}$, $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ е негативан цео број}\}$ и
 $D = \{x \mid x \in A \text{ и } x \text{ није ни позитиван ни негативан цео број}\}$.
7. Која од тврдњи је тачна?
 - а) $N_0 \subset Z$
 - б) $Z^+ \cap Z^- = \{0\}$

Температура по градови

Град	Температура
Скопље	3°C
Битољ	-6°C
Охрид	5°C
Велес	0°C
Струмица	7°C
Прилеп	-4°C

8. У табели су дате температуре у неколико градова у Републици Северној Македонији. У којим градовима је температура изражена позитивним целим бројевима, а у којим негативним?

9. Помоћу знакова + и – запиши:
- температуру од 11°C испод нуле
 - температуру од 7°C изнад нуле
 - губитак од 5.000 евра
10. Шта је тачно?
- $3 \in \mathbb{N}_0$
 - $0 \in \mathbb{Z}^-$
 - $-22 \in \mathbb{Z}$
 - $0 \in \mathbb{N}$
11. Који скуп треба уписати на празну линију $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \emptyset$.
- $\mathbb{Z} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$
 - $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^-$
 - $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^-$
12. Јуче у 13 часова температура је износила -3°C , а данас је -5°C . Када је температура била нижа? Јуче у 13 часова температура је износила -3°C , а данас је -5°C . Када је температура била нижа?
13. Помоћу бројевне праве упореди следеће бројеве:
- 2 и 5
 - 4 и 0
 - 5 и 0
 - 2 и -6
 - 1 и -2
14. Препиши задатак у свеску и заокружи тачан одговор:
- $-116 < +4$
 - $0 > 433$
 - $-34 > 0$
 - $-200 < -199$
15. Поређај следеће бројеве по величини, почев од највећег: -4, 0, -49, 32, 15, -5 и -50
16. Дат је скуп $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } -4 < x < 1\}$.
Запиши табеларно: $B = \{x \mid x \in A \text{ и } x < -1\}$ и $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \geq -2\}$.
17. Температурата се променила од -10°C на -4°C . Која температура е повисока?
18. Подреди ги по големина броевите почнувајќи од најмалиот: -15, 45, 13, 0, -34, -31 и 14.
19. Који од знакова < или > треба да стоји на празној линији?
- 0 и -234
 - 99 и -100
 - 14 и +13
 - +21 и -30

Апсолутна вредност

У овој лекцији упознаћемо се са појмом апсолутне вредности, који представља удаљеност једног броја од нуле на бројевној правој, независно од правца. Овај концепт је од кључног значаја за разумевање разлике између позитивних и негативних бројева, и игра важну улогу у решавању различитих математичких задатака.

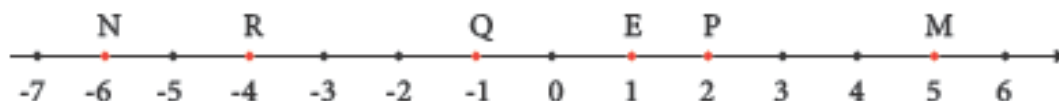


Подсетимо се:

1. Права p , са изабраним тачкама O и E , и јединичним одсечком OE , заједно са појмовима „лево“ и „десно“ (тачка O се налази лево од E , а E десно од O), представља бројевну праву када се преношењем јединичног одсечка на обе стране од O , означе бесконачно много тачака (такозване целобројне тачке), којима се придружују цели бројеви (као на цртежу у примеру 1). Ова права се често назива и координатна оса.
2. Избором тачака O и E , бројевна права добија смер. Смер од O ка E (односно удесно) назива се позитиван смер, док се супротан смер (улево) назива негативан смер. На полуправи OE се налазе позитивни цели бројеви, а на њеној супротној полуправи — негативни цели бројеви.
3. За сваку целобројну тачку N , број a придружен тој тачки назива се координата те тачке, и означава се са $N(a)$. Тачка O се назива координатни почетак.

Пример 1

а) На цртежу су дате тачке M, N, P, Q и R . Које су њихове координате?



б) За сваку од тачака M, N, P, Q и R напиши: с које стране од тачке O се налази и на којој удаљености од тачке O .

Решење:

- а) Тачка M има координату 5, односно $M(5)$. Затим: $N(-6)$, $P(2)$, $Q(-1)$ и $R(-4)$.
- б) Тачка M се налази десно од тачке O и удаљена је 5 јединичних одсечака. Тачка N се налази лево од тачке O и удаљена је 6 јединичних одсечака. Настави у своју свеску са записима за тачке P, Q и R .

Нека је $A(a)$ тачка на бројевној правој. Тада важи:

1. Ако је a позитиван цели број, односно $a = n$, онда се тачка A налази десно од O , а њено растојање од тачке O је једнако n јединичних дужи.
2. Ако је a негативан цели број, односно $a = -n$, онда се тачка A налази лево од O , а њено растојање од тачке O је такође једнако n јединичних дужи.
3. Ако је $a = 0$, тада се тачка A поклапа са координатним почетком O .

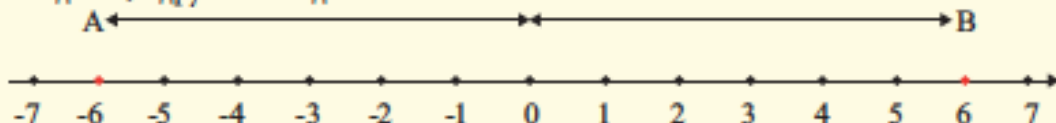
Пример 2

Размотри тачке $A(-6)$ и $B(6)$ на бројевној правој као што је приказано на цртежу. Шта запажаш ?

Решење:

Те тачке су симетричне у односу на тачку O , а њихове координате су супротни цели бројеви,

односно 6 и -6 . Осим тога, обе су једнако удаљене од координатног почетка O , али се једна налази десно, а друга лево од тачке O .



Растојање од било које целобројне тачке $A(a)$ до координатног почетка O , без обзира на то да ли се тачка налази лево или десно од O , назива се апсолутна вредност броја a и записује се са $|a|$.

Примери:

$$|-35| = 35; |135| = 135; |-453| = 453; |0| = 0; |47| = 47.$$

Задатак 1

Пронађи апсолутне вредности следећих бројева: $11, -15, -34, 15, -11, 20, -20$

За апсолутне вредности целих бројева важе следећа својства.

За сваки цели број :

1. $|-a| = |a|$; 2. $|a| = 0$ ако и само ако $a = 0$; 3. $|a| \in \mathbb{N}_0$.

Задатак 2

Пронађи све целе бројеве a за које важи: а) $|-a| = 3$; $|a| = 8$; $|a| = 0$.

Задатак 3

Нека су $a, b \in \mathbb{Z}$. Провери тачност тврдњи и образложи свој одговор:

- а) Ако је $|a| > |b|$, онда $a > b$.
- б) Ако је $a > b$, онда $|a| > |b|$.
- в) Ако је $a < b$, онда $|a| < |b|$.

Задатак 4

Дате су следеће тврдње:

- 1. Сваки негативан цео број је мањи од нуле, а нула је мања од сваког позитивног целог броја.
- 2. Сваки негативан цео број је мањи од сваког позитивног целог броја.
- 3. Не постоји најмањи цео број и не постоји највећи цео број.
- 4. Најмањи позитиван број је -1 , а највећи негативан цео број је 1 .
- 5. Између било која два цела броја или нема ниједног целог броја, или постоји коначан број целих бројева.
- 6. За сваки пар различитих целих бројева, један је већи, а други мањи.
- 7. Од два позитивна броја, већи је онај са већом апсолутном вредношћу, а од два негативна броја, мањи је онај са већом апсолутном вредношћу.
- 8. Апсолутна вредност сваког целог броја је број већи или једнак нули
- 9. Број је позитиван ако је мањи од нуле, а негативан ако је већи од нуле.
 - а) Које тврдње су тачне?
 - б) Нетачне тврдње препиши тако да буду тачне.

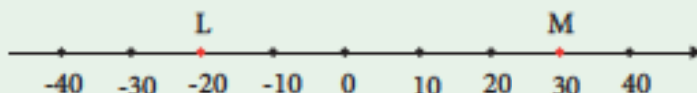
Пример 3

Марија и Лука учествују у такмичењу у прикупљању новца за хуманитарну организацију. Марија је прикупила 50 евра, али је имала трошкове од 20 евра за материјал. Лука је, с друге стране, успео да прикупи 30 евра, али је имао трошкове од 50 евра.

- а) Ко од њих има бољи коначан резултат?
- б) Колика је апсолутна вредност сваког од резултата?

Решење:

- а) Марија је прикупила 50 евра и потрошила 20 евра, што значи да јој је остало 30 евра и њен резултат је $+30$ евра. Лука је прикупио 30 евра, али је потрошио 50, па му је резултат -20 евра. На бројевној правој, резултати изгледају овако:



- б) Апсолутна вредност Маријиног резултата је $|30| = 30$. Апсолутна вредност Лукиног резултата је $|-20| = 20$.

Задатак 5

Замисли да живиш у граду у којем зимске температуре могу бити веома ниске. На пример: 1 јануара температура износи -5° , 2 а 2 јануара температура износи 3°C . Која је удаљеност од нуле у температури у ова два дана?

Како можеш да примениш концепте апсолутне вредности и поређења целих бројева у стварном животу? Да ли можеш да наведеш примере из различитих области, као што су спорт, економија или наука, у којима ти ови концепти могу помоћи да донесеш одлуке или боље разумеш податке? Истражи.

I. Оцени себе на скали од 1 до 5:

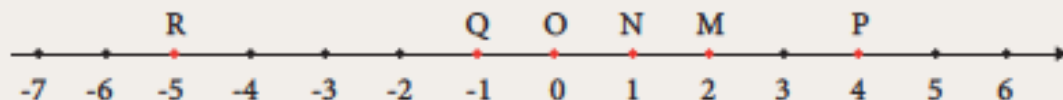
1. Уопште не разумем.
2. Разумем мало, али имам много питања.
3. Разумем основне концепте, али се не осећам сигурно.
4. Добро разумем, али могу још да научим.
5. Све сам разумео/ла и осећам се сигурно.

II. У своју свеску одговори на следећа питања:

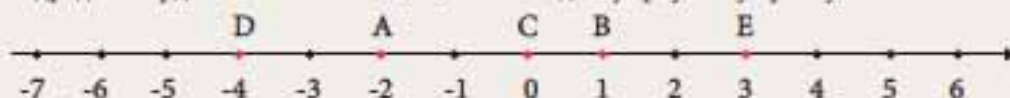
1. Које су три ствари које сам научио/ла из ове лекције?
2. Да ли сам успео/ла да применим концепте апсолутне вредности и поређења целих бројева?
3. Да ли могу да наведем примере?
4. Шта ми је било најтеже да научим у овој лекцији и зашто?
5. Који део лекције бих желео/ла да додатно појаснимо или поновимо?

Самосталан рад

1. На бројевној правој одреди тачке: A(2), B(-2), C(4), D(-6) и E(5).
2. Дали сваком позитивном и сваком негативном целом броју одговара по једна тачка на бројевној правој? Објасни свој одговор.
3. На слици су означене тачке M, N, P, Q и R. Које су њихове координате?

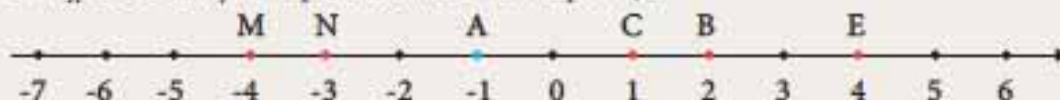


4. Одреди координате тачака A, B, C, D и E на датој бројевној правој.



5. Нека температуре у Кавадарцима, Неготину, Гевгелији и Делчеву, измерене једног зимског дана, буду означене тачкама: K(-5), N(-3), G(+3) и D(0). Нацртај бројевну праву и прикажи резултате мерења.

6. У коју ће се тачку померити тачка A ако се пребаци:



- а) две јединице улево? б) три јединице удесно?

7. Користећи бројевну праву, запиши три узастопна цела броја која се налазе:

- а) лево од броја -2 б) десно од броја -1

- 8.* Дате су тачке M(-3), N(2) и P(4). Одреди координате тачака E и F које су средишне тачке дужи MN и NP, редом, а затим израчунај дужину дужи EF.

9. Нека се тачка A налази две јединице десно од -1 на бројевној правој. Одреди тачку B која је удаљена 3 јединице од тачке A.

10. Тачка M(-1) је средиште дужи AB. Одреди координату тачке A ако је B(2). Колика је?

11. Попуни табеле:

а)

a	3	-5	10	-3	-12	0	14
$-a$							

б)

a	3	-5	10	-3	-12	0	14
$ a $							

12. Нађи све целе бројеве a за које важи:

- а) $|-a| = 3$ б) $|a| = 8$ в) $|a| = 0$

13. Нека је $x \in \mathbb{Z}$. Какав је број:

- а) $-x$, ако је x негативан број? б) x , ако је $-x$ позитиван број?
в) $|x|$, ако је x позитиван број?

- 14.* Реши једначину $|x| = 10$.

Сабирање целих бројева са истим или различитим предзнацима

У свакодневном животу често се сусрећеш са позитивним и негативним бројевима. Температуре могу бити изнад или испод нуле, финансијске трансакције могу укључивати добитке или губитке, а висине могу бити изнад или испод нивоа мора. Израчунавање са целим бројевима је свеприсутно у нашој свакодневици. Да би правилно извршавао такве прорачуне, потребно је да знаш како да сабираш целе бројеве, без обзира да ли имају исте или различите предзнаке. У овој лекцији ћеш научити како да сабираш целе бројеве, која правила треба да следиш и како да их примениш у стварним ситуацијама. Вежбањем и анализом примера стекнућеш сигурност у раду са позитивним и негативним бројевима.



Пример 1

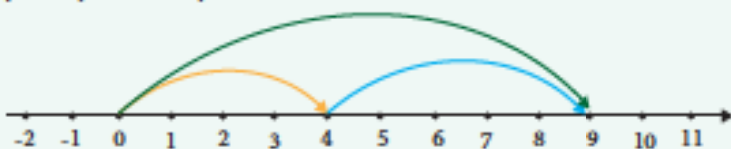
Температура ваздуха у 7 часова била је 4°C изнад нуле. Колика је температура у 14 часова ако се она повећала за 5°C ?

Решење:

Приказано на бројевној правој, ово изгледа слично као на термометру:

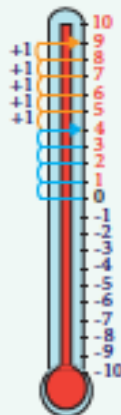
Да бисмо представили број $+4$ на бројевној правој, крећемо се удесно (у позитивном смеру) 4 јединичне дужине.

Затим се, због повећања температуре за $+5$, померамо још 5 јединица удесно.



црт. 16

Из цртежа се види $(+4) + (+5) = +9$, односно $+(4 + 5) = +9$



црт. 1а

Задатак 1

Израчунај:

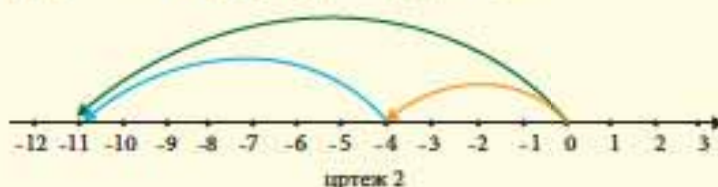
- а) $(+73) + (+29)$ б) $(+247) + (+113) + (+310)$

Пример 2

У један зимски дан температура у подне износила је 4°C испод нуле, а до 19 часова спустила се још за 7°C . Колика је била температура у 19 часова?

Решење:

Температура у подне била је 4°C испод нуле (негативан број -4°C), затим се спустила за још 7°C (опет негативна вредност -7°C). То значи да ће у 19 часова бити хладније, односно температура у 19 часова биће нижа од температуре у подне и она ће износити 11°C испод нуле, односно -11°C . Можемо рећи да смо сабрали два негативна цела броја. При томе, као резултат тог збира поново смо добили негативан цео број. И овај пример може се представити на бројној правој (цртеж 2).



Са бројне праве види се да се најпре померамо 4 јединична одсечка улево (у негативном смеру), а затим, да бисмо додали број -7 , још 7 јединичних одсечака улево (поново у негативном смеру бројне праве, као на цртежу 2), одакле се види да је $(-7) + (-4) = -(7 + 4) = -11$.

Закључак из Примера 1 и 2:

Збир два цела броја са истим предзнацима (оба позитивна или оба негативна) је цео број чија је апсолутна вредност збир апсолутних вредности сабирака, и има исти предзнак као и сабирани бројеви.

Задатак 2

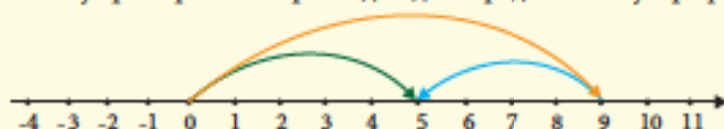
Израчунај: а) $(+5970) + (+3730)$ б) $(-6100) + (-1370) + (-2806)$

Пример 3

- а) Температура у подне била је 9°C изнад нуле. До 20 часова опала је за 4°C .
Колика је температура у 20 часова?
- б) Температура у подне била је 9°C изнад нуле. До 20 часова опала је за 12°C .
Колика је температура у 20 часова?

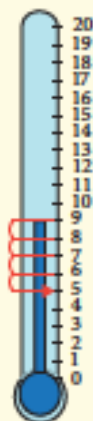
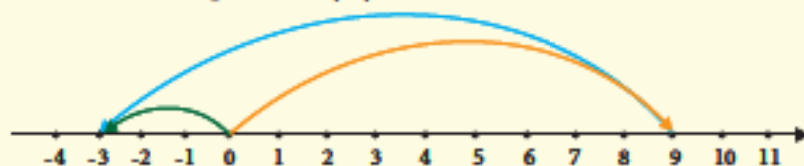
Решење:

а) И овај пример, као и претходна два, представљен је графички, односно цртежима.



Користећи цртеже са термометром и бројном осом, објасни решење: $(+9) + (-4) = +(9 - 4) = +5 = 5$. Разлика у загради $9 - 4$ припада скупу N (природним бројевима), јер, као што се може приметити и на бројној оси, у ствари се ради о растојањима између две тачке (броја), односно апсолутним вредностима. Притом се мења само смер кретања у зависности од знака броја (позитиван или негативан број).

- б) Решење ћемо приказати само помоћу бројне осе. Најпре представљамо први сабирак, односно померамо се 9 јединичних отсецака удесно за температуру $+9$, а затим 12 јединичних отсецака улево. Тако $(+9) + (-12) = -(12 - 9) = -3$. Разлика $12 - 9$ припада скупу N . Зашто?



Задатак 3

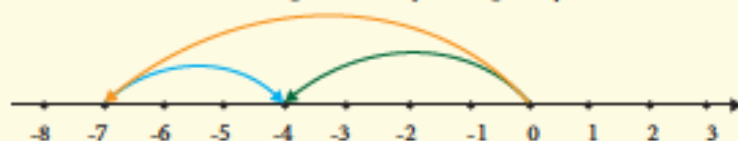
Израчунај: а) $(+85) + (-30)$ б) $(+497) + (-289)$

Пример 4

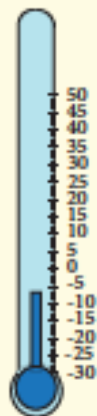
- а) Температура у једном зимском дану ујутру је износила 7°C испод нуле. Колика је температура у подне истог дана ако се повећала за 3°C ?
- б) Температура у једном зимском дану ујутру је износила 7°C испод нуле. Колика је температура у подне истог дана ако се повећала за 11°C ?

Решење:

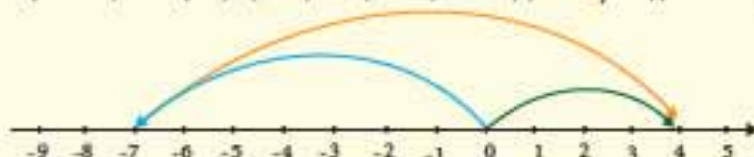
- а) Решење овог задатка приказано је на цртежу.



На бројној оси, почев од нуле, померамо се 7 јединичних отсецака улево, јер је температура ујутру била 7°C испод нуле, а затим се померамо 3 јединичне отсечке удесно, јер се температура повећала за 3°C . На тај начин добијамо да је температура у подне износила 4°C испод нуле. Ово можемо записати и овако: $(-7) + (+3) = -(7 - 3) = -4$. Разлика $7 - 3$ припада N . Објасни зашто.



- 6) И у овом случају решење је приказано на бројевној правој. Најпре се крећемо 7 јединичних отсечака улево (за температуру -7°C), а затим 11 јединица удесно (због повећања температуре за 11°C). Тако добијамо $(-7) + (+11) = +(11-7) = +4(-7) + (+11) = +(11-7) = +4(-7) + (+11) = +(11-7) = +4$. Дакле, у подне температура је била $+4^{\circ}\text{C}$.



Решавањем примера 3 и 4 може се закључити:

Збир два цела броја супротних знакова (позитиван и негативан или негативан и позитиван) је цео број чија апсолутна вредност је једнака разлици апсолутних вредности та два броја, а знак збира је једнак знаку броја са већом апсолутном вредношћу.

Збир било ког целог броја са нулом и нуле са било којим целим бројем јесте тај исти цео број.

Збир било ког целог броја и његовог супротног броја је нула.

Задатак 4

Попуни табелу:

a	26	-65	-182	200	1670	0	34
b	-12	19	243	-497	0	-195	-34
a+b							

Задатак 5

Температура у 14 часова била је 6°C изнад нуле. Уколико је до 19 часова пала за 6°C , колика је била температура у 19 часова? Објасни одговор помоћу бројевне праве и као збир два цела броја. Шта можеш да закључиш?

Знаци сабирака	Знак збира	Операција између апсолутних вредности	Пример
$\oplus + \oplus = \oplus$	+	сабирање	$(+6) + (+4) = +10$
$\ominus + \ominus = \ominus$	-	сабирање	$(-4) + (-6) = -10$
$\oplus + \ominus = \oplus$	+	одузимање	$(+6) + (-4) = +2$
$\ominus + \oplus = \ominus$	-	одузимање	$(-4) + (+6) = +2$

Пример 5

- а) Анита има негативан салдо на својој платној картици од 1 200 денара. Добија је прилив средстава од 5 700 денара. Какво је стање на картици након прилива?
- б) Милош има негативан салдо од 1 000 динара, али купује преко интернета и прави додатни одлив средстава од 280 динара. Какво је стање на његовој картици након куповине?
- в) Да ли Анита и Милош имају довољно новца заједно да купе поклон од 3 300 динара који су изабрали за свог пријатеља Илира?

Решење:

- а) Због негативног салда на Анитиној картици, почетно стање је $-1\,200$ динара. Након прилива од 5 700 динара $(+5\,700)$, стање на картици је: $(-1\,200) + (+5\,700) = +4\,500$
- б) Милош има негативан салдо од 1 000 динара и томе додаје трошак од 280 динара, што значи да је стање на његовој картици: $(-1\,000) + (-280) = -1\,280$ динара
- в) Да би купили поклон, потребно им је 3 300 динара, али заједно имају: $(+4\,500) + (-1\,280) = +3\,220$, што није довољно за куповину тог поклона. Да ли би Анита и Милош имали довољно новца да купе изабрани поклон ако Милош претходно није куповао преко интернета?

Задатак 6

Због лоших навика у исхрани и неодговарајућих дијета, Пеце је имао 6 килограма мање од своје уобичајене телесне масе. Желео је да побољша своје опште физичко стање и да се врати на своју уобичајену телесну масу. Уз правилну и здраву исхрану успео је да повећа своју телесну масу за 7 килограма. Какво је коначно стање са телесном масом Пецета?

Задатак 7

Мерита се вози лифтом у солитеру.

- а) Налази се на подземном паркингу на спрату означеном са -2 и лифтом се креће 6 спратова нагоре. На који спрат ће стићи Мерита?
- б) Ако са 4 спрата жели да се спусти до подземног паркинга на спрат означен са -3 , колико спратова треба да се спусти? Како се ова ситуација представља као збир целих бројева?

Како се мења збир ако уместо да сабираш само позитивне бројеве, додаш и негативне?
Како то утиче на коначан избор ?

У твојој свесци:

1. Запиши три ствари које си научио/научила о сабирању целих бројева са истим или различитим предзнацима.
2. Напиши један пример из свакодневног живота где можеш да примениш оно што си научио/научила.
3. На скали од 1 до 5, процени како се осећаш: колико си сигуран/сигурна у своје разумевање лекције (1 – уопште не разумем, 5 – у потпуности разумем).
4. Запиши једно питање које ти није јасно или о коме би желео/желела да сазнаш више.

Самосталан рад

1. Уз помоћ бројне осе израчунај збирове:

- а) $(+2) + (+3)$ б) $(-4) + (-2)$ в) $(+3) + (-7)$ г) $(-5) + (+4)$
д) $(+23) + (+32)$ ђ) $(+17) + 0$ е) $(-140) + (-8)$ ж) $0 + (-54)$
з) $(-18) + (+23)$ с) $(+2) + (-2)$ и) $(+51) + (-68)$ ј) $(-153) + (+153)$

2. Представи број $+15$ као збир три позитивна броја.

3. Представи број -24 као збир два негативна цела броја.

4. Број -11 запиши као збир два цела броја са различитим предзнацима.

5. Број $+6$ запиши као збир два цела броја са различитим предзнацима.

6. Израчунај:

- а) $(-45) + (-13) + (-23)$ б) $(+12) + ((+99) + (+1))$ в) $(+41) + (+23) + (+87)$
г) $(-14) + (-21) + (-10) + (-15)$ д) $(+22) + (-43) + (+1)$ ф) $(+16) + (-31) + (+2)$
е) $(-43) + (+41) + (+5)$ ж) $(+7) + (-71) + (+15)$

7. Мирко дугује Ани 60 динара, а Петру 90 динара. Колико укупно динара дугује Мирко? Запиши Мирков дуг као бројни израз са целим бројевима.

8. Биљана је имала 1 000 динара на текућем рачуну. Потрошила је 1 200 динара, а након извесног времена уплатила је на свој рачун 3 000 динара. Колико новца сада има Биљана?

9. Који број ће се добити ако се збир бројева -45 и $+57$ сабере са збиром бројева -2 и -16 ?

10. Једне вечери температура ваздуха је била -11°C , а током ноћи се смањила за 5°C . Колика је била температура након смањења?

Својства операције сабирања целих бројева

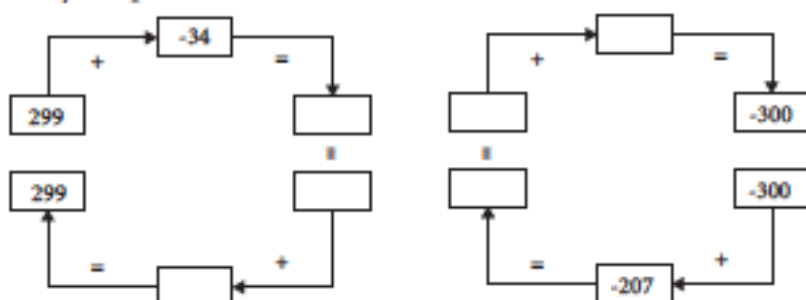
Сабирање је једна од основних математичких операција и има кључну улогу у свакодневном животу. Од куповине производа у продавници до мерења времена или количине – сабирање ти помаже да организујеш и управљаш својим ресурсима.

У овој лекцији ћеш научити својства сабирања, као што су комутативност и асоцијативност, и истражићеш како она утичу на начин решавања математичких проблема. Уз практичне примере и активности, применићеш ова својства и разумећеш како да их користиш у различитим ситуацијама.



Пример 1

Попуни празна места:



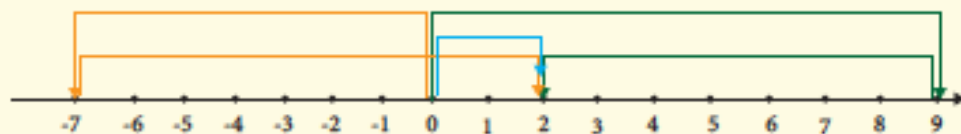
Упутство: Да попуниш празна поља у дијаграмима, подсети се како се сабирају цели бројеви са истим или различитим предзнацима из претходне лекције.

Пример 2

Израчунај збирове: $9 + (-7)$ и $(-7) + 9$.

Решење:

Користећи бројну осу на слици 2, на којој су означена оба збира $9 + (-7)$ и $(-7) + 9$, можемо закључити да је $9 + (-7) = 9 - 7 = 2 = (-7) + 9$



црт. 1

Збир два цела броја се не мења ако се сабирци замене местима, односно важи комутативни закон. Другим речима:

За сваки $a, b \in \mathbb{Z}$, важи: $a + b = b + a$.

Задатак 1

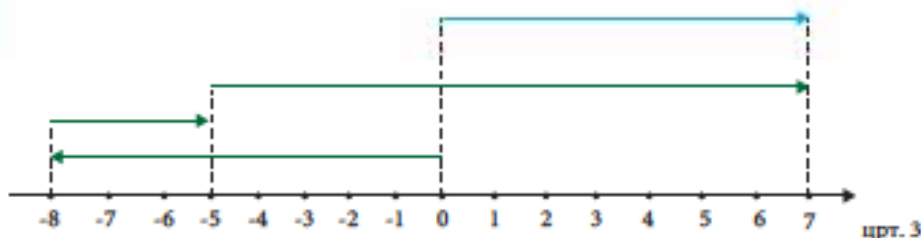
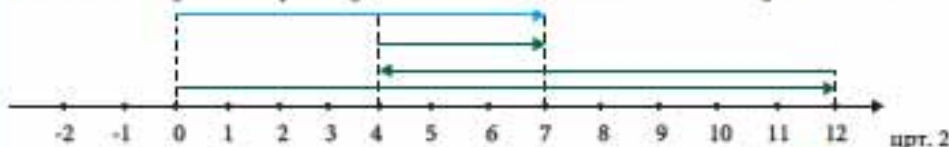
Провери тачност једнакости $a + b = b + a$ за следеће бројеве:

а) $a = 81, b = -5$; б) $a = -3540, b = 3075$; в) $a = 220, b = -220$.

Пример 3

Израчунај збиреве $(12 + (-8)) + 3$ и $12 + ((-8) + 3)$.

На слици 2 приказан је збир $(12 + (-8)) + 3$, а на слици 3 збир $12 + ((-8) + 3)$.



Из једнакости одговарајућих координата следи да су оба збира једнака, односно: $(12 + (-8)) + 3 = 12 + ((-8) + 3)$.

За било која три броја $a, b, c \in \mathbb{Z}$, збирови $(a + b) + c$ и $a + (b + c)$ су једнака, односно: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Другим речима, збир три цела броја не зависи од њиховог груписања, односно, за сабирање целих бројева важи асоцијативни закон.

Зато уместо $(a + b) + c$ или $a + (b + c)$, писаћемо само $a + b + c$.

Задатак 2

Најједноставније могуће израчунај следеће збирове:

а) $7300 + (-4900) + (-2300) + 900$ б) $1600 + (-9600) + (-1600) + 4600$

Пример 4

На почетној станици у један аутобус градског превоза ушло је 17 путника. На првој станици ушло је 10 путника, а изашло 3 путника. На другој станици ушло је 7 путника, а изашло 5 путника, и на трећој станици ушла су 4 путника, а изашло 12 путника. Колико путника је било у аутобусу након треће станице?

Решење:

На почетној станици у аутобус је ушло 17 путника. На првој станици ушло је 10 путника, а изашло 3 путника. Нови број путника у аутобусу је: $17 + 10 - 3 = 27 - 3 = 24$

На другој станици ушло је 7 путника, а изашло 5 путника. Нови број путника у аутобусу је: $24 + 7 - 5 = 26$

На трећој станици ушла су 4 путника, а изашло 12 путника.

Нови број путника у аутобусу је:

$$26 + 4 - 12 = 18$$

Значи, након треће станице у аутобусу је било 18 путника.

Пример 5

Петар, Ана и Борис добили су поене у математичкој игри. Петар је имао -7 поена, Ана $+12$ поена, а Борис -5 поена. Они желе да израчунају колико укупно поена имају заједно, али је сваки од њих рачунао на различит начин.

- Петар је записао $(-7) + (+12) + (-5)$, Ана $(+12) + (-7) + (-5)$, а Борис $(-5) + (-7) + (+12)$. Колико је добио сваки? Које својство је примењено?
- Употреби асоцијативно својство да израчуна збир.

Решење:

- Можеш приметити да је сваки од њих прво написао број својих поена.

Израчунавамо: Петар: $(-7) + (+12) + (-5) = (+5) + (-5) = 0$; Ана: $(+12) + (-7) + (-5) = (+5) + (-5) = 0$; Борис: $(-5) + (-7) + (+12) = (-12) + (+12) = 0$. Сваки од њих је сабирке записао у различитом редоследу — тиме је коришћено комутативно својство сабирања целих бројева. Укупан број освојених поена увек је 0.

- Користећи асоцијативно својство, бројеве можемо груписати различито: $(-7 + (-5)) + 12$; $(-7) + ((-5) + (+12))$; $(-7 + (+12)) + (-5)$. У сваком случају, укупан број поена је 0. Без обзира на редослед (комутативност) или начин груписања (асоцијативност), резултат је исти. То значи да нема ни добитак ни губитак поена.

Задатак 3

Запиши низ од шест целих бројева са првим чланом 11, при чему се сваки наредни члан добија додавањем броја -5 на претходни члан. Сваки наредни члан израчунај на два начина. Које својство ћеш користити?

Када сабираш два негативна броја, какав ће бити коначан резултат?
 Да ли ћеш добити већи негативан број или ће коначан резултат бити мањи од сабирака?
 Објасни свој одговор уз примере. Размисли и о томе како комутативно и асоцијативно својство утичу на сабирање целих бројева.
 Како можеш да примениш ова својства у свакодневним активностима?

Одговори на следећа питања у свесци:

1. Шта сам ново научио/научила данас?
2. Који делови лекције су ми били најразумљивији?
3. Где сам имао/имала потешкоћа?

Оцени сам/сама колико успешно си савладао/савладала лекцију, на скали од 1 до 5:

- 1 – Уопште нисам разумео/ла
- 2 – Делимично сам разумео/ла
- 3 – Разумео/ла сам, али ми је потребна додатна помоћ
- 4 – Разумео/ла сам и могу да применим
- 5 – Потпуно сам разумео/ла и могу да поучим неког другог

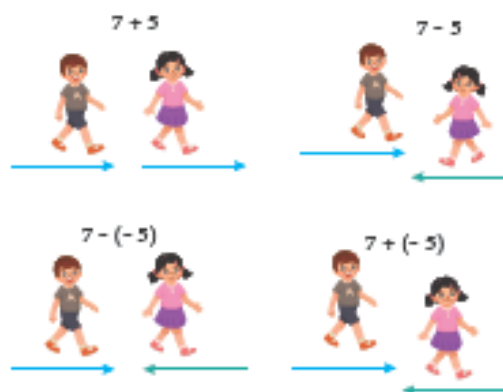
Напиши један или два корака које можеш да предузмеш како би побољшао/ла своје разумевање лекције, ако је потребно.

Самосталан рад

1. Ако је $(-199) + (+101) = -98$, колико износи $(+101) + (-199)$?
2. Покажи да је тачно једнакост $a + b = b + a$, за $a = -54$, $b = -15$.
3. Који број треба да стоји уместо x да би једнакост била тачна:
 $((-32) + (+17)) + (-20) = (-32) + (x + (-20))$?
4. Запиши асоцијативно својство операције сабирања целих бројева, а затим провери његову тачност за бројеве -14 , $+11$ и -10 .
5. Израчунај вредност израза применом комутативног и асоцијативног својства:
 $(-3) + (-2) + 0 + (+1) + (+2) + (+3) + (+4)$.
6. Који број треба да буде на линији? Које својство си користио/ла?
 а) $(-23) + (+17) = (+17) + *$ б) $(-217) + * = (-15) + (-217)$
7. Ако је познато да $((-16) + (+11)) + (-30) = -35$, колико износи $(-16) + ((+11) + (-30))$?
8. Нека је $A = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$. Уз примену својстава операције сабирања целих бројева, израчунај збир елемената скупа A .

Једначине облика $x + a = b$. Одузимање целих бројева

Данас ћеш се упознати са основним појмовима једначина облика $x + a = b$, које су важан део решавања математичких проблема. Ова једначина помаже да пронађемо непознату вредност, означену са x , када су познати бројеви a и b . У том процесу ћеш научити како да примениш операцију одузимања целих бројева да би одредио/ла вредност x . Када имаш једначину као што је $x + a = b$, циљ је да изолујеш променљиву x на једној страни једначине. Да би то постигао/ла, користићеш правила одузимања, што ће ти омогућити да одредиш решење једначине.



Ова лекција не само да ће ти помоћи да разумеш како функционишу једначине, већ и како да примениш математичке операције у свакодневном животу.

Пример 1

Реши једначину $x + 36 = 44$ у $\mathbb{Z}$.

Решење:

Пошто је x непознат сабирак, он је једнак разлици збира и познатог сабирка, односно: $x = 44 - 36$, па је $x = 8$.

Провера: $8 + 36 = 44$.

Шта се дешава са овим појмовима у скупу целих бројева?

Пример 2

Реши једначину $x + 17 = 11$ у скупу целих бројева.

Решење:

Оваа равенка ће ја решиме со додавање на бројот -17 на двете страни од равенката. Така: $x + 17 + (-17) = 11 + (-17)$, односно $x + 0 = -(17 - 11)$. Значи, $x = -6$.

За $a, b \in \mathbb{Z}$, свака једначина облика $x + a = b$ има решење $x = b + (-a)$ у $\mathbb{Z}$.

Задатак 1

Реши једначине у $\mathbb{Z}$ (скупу целих бројева):

а) $x + (-53) = 108$ б) $x + 136 = 190$ в) $103 + x = -82$ г) $-160 + x = 115$.

Решење једначине $x + a = b$ у $\mathbb{Z}$ називамо бројем који представља разлику бројева b и a . На исти начин дефинишемо и разлику два цела броја, односно одузимање у $\mathbb{Z}$.

Да одузмемо цео број b од другог броја a , значи да саберемо a са супротним бројем од b .

За $a, b \in \mathbb{Z}$, дефинишемо разлику $a - b$ као збир $a + (-b)$.

Пример 3

Израчунај: а) $54 - 38$ б) $(-48) - 23$ в) $139 - (-110)$ г) $(-305) - (-227)$.

Решење:

а) $54 - 38 =$ Според дефиницијата за одземање на цели броеви $= 54 + (-38) = 16$

б) $(-48) - 23 = (-48) + (-23) = -71$ в) $139 - (-110) = 139 + (+110) = 249$

г) $(-305) - (-227) = (-305) + (+227) = -78$

Задатак 2

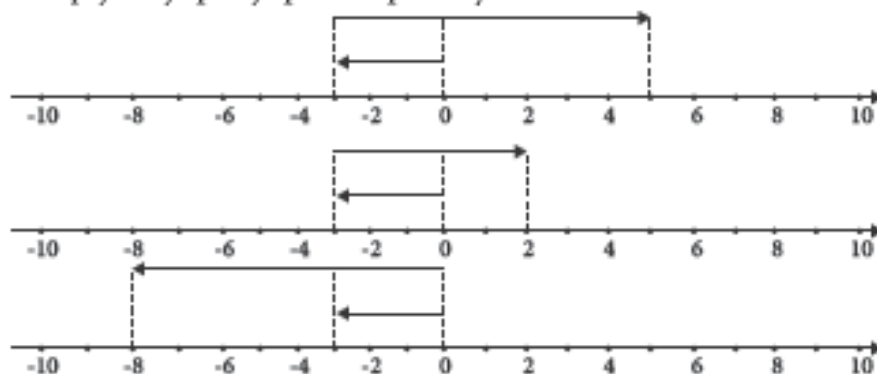
Објасни тврдњу: Разлика било која два цела броја је поново цео број.

Задатак 3

Израчунај: а) $35 - 457$ б) $(-97) - 38$ в) $244 - (-310)$ г) $(-125) - (-98)$.

Задатак 4

На бројевној правој прикажи разлику $-3 - 5$.



Пример 4

Марко је имао одређену суму новца. Куповао је картицом и, након што је потрошио 236 динара, уочио је да је у дугу према банци 43 динара. Колико је новца имао на почетку?

Решење:

Нека x буде сума новца коју је Марко имао на почетку. Тада можемо саставити једначину: $x - 236 = -43$. Да бисмо пронашли x , додајемо супротан број од -236 на обе стране једначине, тј. сабирамо са 236: $x - 236 + 236 = -43 + 236$, $x = +193$. Марко је имао 193 динара на почетку.

Пример 5

- а) Јетон има дуг од 2 300 динара. Након неког времена успева да смањи дуг за 1 400 динара. Како се ова ситуација може записати као одузимање целих бројева? Колико му је новца остало да врати?
- б) Јасна има дуг од 2 300 динара и додатно се задужује за још 1 420 динара. Након неког времена успева да смањи дуг за 3 800 динара. Како се ова ситуација може описати операцијама са целим бројевима? Какав је стање Јаснине рачуна након отплате?

Решење:

- а) Објашњење записивања ситуације:
 $(-2\,300) - (-1\,400) = (-2\,300) + (+1\,400) = -900$. Значи, Јетон има још 900 динара дуга за враћање.
- б) $(-2\,300) + (-1\,420) + 3\,800 = (-3\,720) + (+3\,800) = +80$. Значи, Јасна више није у дугу и на рачуну има 80 динара. Који део израза представља дуг Јасне након додатног задуживања? Колики је тај износ?

Пример 6

Мите је добио задатак: на збир бројева 3 792 и $-4\,657$ треба да дода разлику бројева $-8\,461$ и 4 966. Провери да ли је Мите тачно решио задатак и, ако је потребно, исправи га.

Решење:

Мите је најпре израчунао збир бројева $3\,792 + (-4\,657) = -865$.

Затим је израчунао разлику:

$$-8\,461 - 4\,966 = -8\,461 + (-4\,966) = -13\,427.$$

На крају је сабрао та два резултата $-865 + (-13\,427) = -14\,292$.

Задатак 5

Јована има 330 динара у минусу на свом банковном рачуну (тј. у негативном износу). Она позајмљује још 48 динара од другарице да би покрила неке трошкове. Потом јој брат враћа 470 динара које јој је дуговао. Запиши бројевни израз сабирањем и одузимањем целих бројева и одреди његову бројну вредност. Колико динара има Јована на рачуну након ових промена?

Задатак 6

Од збира најмањег позитивног двоцифреног броја и најмањег негативног двоцифреног броја, одузми разлику између најмањег позитивног троцифреног броја и највећег негативног троцифреног броја.

Како ћеш решити једначину $x + a = b$ у скупу целих бројева? Објасни зашто се одузимање целих бројева може записати као сабирање супротног броја.

Запиши у своју свеску:

Да ли сам разумео/ла?

Оцени себе на скали од 1 до 5:

- 1: Уопште нисам разумео/ла.
- 2: Разумео/ла сам мало.
- 3: Разумео/ла сам, али се не осећам сигурно.
- 4: Добро сам разумео/ла, могу да објасним другима.
- 5: Све ми је јасно, осећам се као стручњак!

Питања за размишљање:

1. Шта ми је било најзанимљивије у овом што сам научио/ла?
2. Како могу да применим ово знање у свакодневном животу?
3. Да ли имам неко питање или нешто што ми није јасно?

За сваку оцену 4 или 5, нацртај звездицу – “звезду знања”.

Можеш да поделиш своју оцену и неку занимљиву чињеницу коју си научио/ла са својим другарима у разреду.

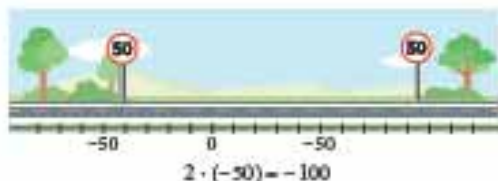
Самосталан рад

1. Реши једначину $x + 15 = 27$ Реши је тако што ћеш додати супротан број од 15 на обе стране једначине.
2. Реши следеће једначине:
а) $x + (-34) = -29$ б) $(+32) + x = -8$ в) $x + (+11) = -33$ г) $(-76) + x = 5$
3. Израчунај:
а) $(+24) - (+25)$ б) $(-67) - (+60)$ в) $(+55) - (-5)$ г) $(-102) - (-2)$
д) $(+8) - (-13)$ ђ) $(-49) - (+11)$ е) $(-84) - (-10)$ ж) $(-200) - (+10)$
5. Ако се на -15 дода неки број, добија се разлика бројева -7 и $+15$.
Који је то број?
6. Од разлике бројева -15 и $+10$, одузми њихов збир.
7. Који број треба додати збиру бројева 88 и -52 да би се добио збир бројева -44 и -52 ?

Множење целих бројева

У овој лекцији ћеш истраживати како да множиш целе бројеве са истим и различитим знаковима. Множење је важна математичка операција која ти не само што помаже да решаваш проблеме, већ и да развијаш логичко размишљање. Правила множења целих бројева са истим или различитим знаковима ће ти помоћи да разумеш како да решаваш различите математичке задатке повезане са множењем.

Баш у овој лекцији ћеш радити задатке који ће ти помоћи да примениш та правила и стекнеш сигурност у раду са целим бројевима.



Пример 1

Израчунај $(+72) \cdot (+9)$.

Решење:

Пошто скуп позитивних целих бројева одговара скупу природних бројева ($Z^+ = N$), операција множења у скупу N се третира и као множење у Z^+ .

Другим речима, множење позитивних целих бројева је исто што и множење природних бројева. Дакле: $(+72) \cdot (+9) = 72 \cdot 9 = 648$, јер $+72 = 72$, и $+9 = 9$.

Пример 2

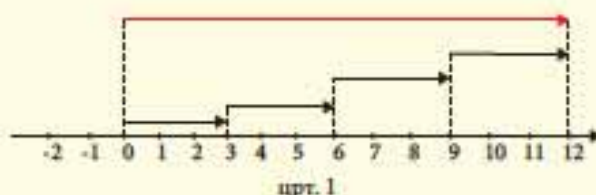
Посматрај кретање тачке по бројевној правој слева надесно, тако да сваке секунде прелази 3 јединице. Ако је тачка тренутно у положају 0, где ће се налазити након 4 секунде?

Решење:

Кретање је у позитивном смеру (надесно), па за 4 секунде тачка пређе:

$$(+3) \cdot 4 = +|3 \cdot 4| = +12 = 12$$

Тачка ће се налазити у положају 12, што је приказано на бројевној правој.



Пример 3

Посматрај кретање тачке по бројевној правој здесна налево, тако да сваке секунде прелази 3 јединице. Ако је тачка сада у положају 0, где се налазила пре 4 секунде?

Решење:

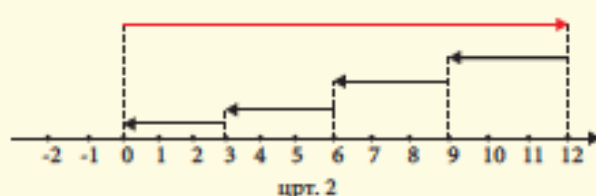
Пошто је кретање на бројној правој улево (негативан смер), пре 4 секунде (прошлост, негативан смер) тачка је била на позитивном делу бројне праве.

Размишљамо овако: пре 1 секунде била је 3 јединице удесно; пре 2 секунде била

је на $2 \cdot 3$ јединице удесно; пре 3 секунде на $3 \cdot 3$ јединице удесно; а пре 4 секунде била је на $4 \cdot 3$ јединице удесно, односно на броју 12.

Пошто је кретање тачке 3 јединице улево у секунди (-3 јединице^с), а тражи се положај тачке пре 4 секунде (-4 секунде^с), закључујемо да је производ ова два негативна броја $(-3) \cdot (-4) = +|3 \cdot 4| = +12 = 12$. Ово је приказано на црт. 2.

Производ два цела броја са истим знацима једнак је производу њихових апсолутних вредности (као природних бројева) са позитивним знаком.



На основу примера 2 и 3, може се записати следеће:

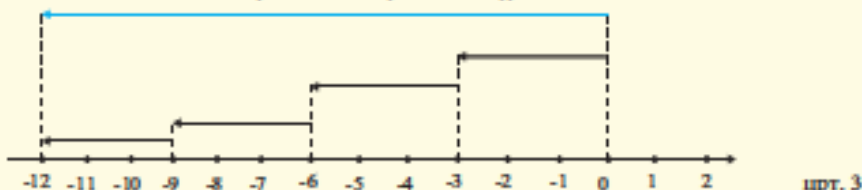
За a и b из скупа целих бројева ($a, b \in \mathbb{Z}$), ако су оба броја истовремено позитивна или истовремено негативна, важи: $a \cdot b = |a| \cdot |b|$

Пример 4

Посматрај кретање тачке по бројевној правој здесна налево, тако да сваке секунде прелази 3 јединице. Ако се тачка тренутно налази у положају 0, где ће бити након 4 секунде?

Решење:

У овом случају, кретање по бројевној правој је налево (негативан смер), а тражи се положај након 4 секунде (будућност, односно позитивно време). Са графика (црт. 3) се закључује да ће тачка после 4 секунде бити у положају -12 . Можемо записати: $(-3) \cdot 4 = -|3 \cdot 4| = -12$.

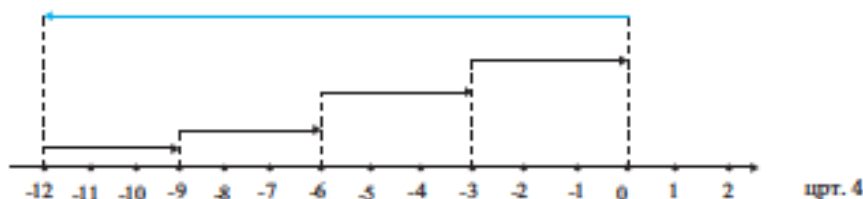


црт. 3

Пример 5

Посматрај кретање тачке по бројевној правој слева надесно, тако да сваке секунде прелази 3 јединице. Ако је тачка сада у положају 0, где се налазила пре 4 секунде?

У овом случају, кретање је у позитивном смеру (надесно), али тражимо положај у прошлости – дакле, пре 4 секунде. Са графика (црт. 4) закључујемо да је тачка пре 4 секунде била у положају -12 . Можемо записати $3 \cdot (-4) = -|3 \cdot 4| = -12$.



црт. 4

Решавањем примера 4 и 5 уочавамо:

Производ два цела броја са различитим знаковима је негативан број, чија је апсолутна вредност једнака производу апсолутних вредности та два броја (као код природних бројева). Односно, за $a, b \in \mathbb{Z}$ ($a \cdot b$ припада скупу целих бројева), ако један број има позитиван, а други негативан знак, важи $a \cdot b = -(|a| \cdot |b|)$

Знаци множилаца	Знак производа	Операција са апсолутним вредностима бројева	пример
$\oplus \cdot \oplus$	+	множење	$(+2) \cdot (+3) = +6$
$\ominus \cdot \ominus$	+		$(-2) \cdot (-3) = +6$
$\oplus \cdot \ominus$	-		$(+2) \cdot (-3) = -6$
$\ominus \cdot \oplus$	-		$(-2) \cdot (+3) = -6$

Задатак 1

Израчунај производе:

- а) $(+72) \cdot (+27)$ б) $(+108) \cdot (+49)$ в) $(-105) \cdot (-63)$ г) $(-5086) \cdot (-309)$
 д) $(+12) \cdot (-6)$ е) $(-36) \cdot (+5)$ ж) $(-256) \cdot (+28)$ з) $(+408) \cdot (-105)$

Пример 6

Производ бројева -62 и $+806$ умањи за број $-2\,686$.

Решење:

Производ бројева -62 и $+806$ је $(-62) \cdot (+806) = -(|62| \cdot |806|) = -49\,972$.

Добијени производ треба умањити за број $-2\,686$,

шта значи $-49\,972 - (-2\,686) = -49\,972 + 2\,686 = -47\,286$.

Пример 7

Једног зимског дана у подне температура је била -7°C , а увече је била 3 пута нижа. Колика је била температура увече?

Решење:

$(-7) \cdot 3 = -21$. Значи, температура увече била је -21°C .

Задатак 2

Данијела ради као дизајнер у високој згради чији су спратови обележени бројевима од -3 до 18 . Она треба да уреди све спратове, па се више пута креће лифтом горе и доле. Полазећи са 10 спрата, силази 3 пута по 4 спрата надоле. На ком спрату се сада налази Данијела?

Како би објаснио разлику између производа два позитивна цела броја и производа једног позитивног и једног негативног целог броја? Зашто је важно да разумеш како знаци утичу на коначан резултат при множењу?

У свесци направи табелу са три колоне са насловима: „Наслов лекције“, „Ниво разумевања“ и „Питања/Коментари“. Као наслов лекције напиши: „Множење целих бројева“. У другој колони оцени своје разумевање једном од следећих опција:

✓ Врло добро разумем, + Добро разумем, ? Имам нешто нејасно, – X Не разумем.

У трећој колони напиши бар једно питање или коментар који имаш у вези са темом.

То може бити нешто што ти није јасно, нешто што ти је занимљиво или нека веза коју си уочио са свакодневним животом.

На крају можеш да поделиш своје одговоре, посебно питања или коментаре са својим друговима из одељења.

То ће ти помоћи у размени идеја и бољем разумевању теме.

Самосталан рад

- Представи производ бројева $(+3) \cdot (-2)$ на бројевној правој.
- Бројеви $+15$ и $+3$ су помножени на следећи начин:
 $(+15) \cdot (+3) = +(|+15| \cdot |+3|) = +(15 \cdot 3) = +45$
 На исти начин израчунај $(-9) \cdot (-12)$.
- Израчунај:
 а) $(+9) \cdot (+2)$ б) $(+21) \cdot (+31)$ в) $(-11) \cdot (-6)$ г) $(-15) \cdot (-15)$ д) $(-11) \cdot (-18)$
- Који број треба да стоји уместо *?
 а) $(-13) \cdot 0 = *$ б) $* \cdot (+456) = 0$ в) $(-237) \cdot 0 = *$
- Ако се неком броју дода $+37$, добије се производ бројева -13 и -2 . Који је то број?
- Нађи производ бројева: 1) $+3$ и -2 2) $+4$ и -2
 а) на бројевној правој б) користећи апсолутну вредност бројева
- Какав број ће се добити (позитиван, негативан или нула) ако се помноже:
 а) Један позитиван и један негативан број?
 б) Два негативна и један позитиван број?
 в) Три негативна броја и нула?
 г) Три негативна броја и два позитивна броја?

8. Упореди помоћу знакова $<$, $>$ или $=$.

а) $(-11) \cdot (+3)$ и 0

б) $(-12) \cdot (-4)$ и 0

в) $(-17) \cdot 0$ и 0

д) $(+97) \cdot (-97)$ и 0 .

9. Нађи вредност израза $(-9) \cdot x$ за:

а) $x = +14$

б) $x = +1$

в) $x = 0$

г) $x = -1$

10. Запиши као збир производ $(-4) \cdot (+5)$, а затим израчунај га.

11. Производ бројева -23 и 2 умањи за разлику бројева -16 и $+14$ помножену са нулом.

12. Запиши збир као производ, а затим израчунај:

а) $(-15) + (-15) + (-15) + (-15)$

б) $(-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7)$

13. Израчунај:

а) $(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5)$

б) $(-8) \cdot (-7) \cdot (-6) \cdot (+2) + (-4) \cdot (-3)$

Својства операције множење целих бројева

У овој лекцији упознаћеш се са својствима множења целих бројева. Као што знаш, множење је једна од основних математичких операција и једна од најчешће коришћених у свакодневном животу. Без обзира на то да ли рачунаш са позитивним или негативним бројевима, правила множења су важна за правилно решавање математичких задатака. У овој лекцији истражићеш различита својства множења, као што су комутативност (променом редоследа не мења се производ), асоцијативност (груписање не утиче на резултат), дистрибутивност (множење преко збира или разлике) и како се та својства примењују када радимо са целим бројевима. Научићеш како да примениш ова својства да би себи олакшао/олакшала рачунање.



У својој свесци направи менталну мапу својстава множења које познајеш у скупу природних бројева.

У множењу природних бројева знаш да важи комутативност (редослед множилаца не утиче на резултат), асоцијативност (начин груписања множилаца не мења производ), као и дистрибутивност у односу на сабирање. Иста ова својства важе и за множење ненегативних целих бројева. Али, да ли се ова својства задржавају и када množимо било која два цела броја?

Пример 1

Израчунај производе: $(-5) \cdot (-4)$ и $(-4) \cdot (-5)$, затим их упореди.

Решење:

Према дефиницији множења, добијамо: $(-5) \cdot (-4) = 20 = (-4) \cdot (-5)$.

Дакле, за сваки пар целих бројева $a, b \in \mathbb{Z}$ важи: $a \cdot b = b \cdot a$, што значи да се производ не мења ако се множиоци замене.

Другим речима, множење целих бројева је комутативна операција.

Задатак 1

Провери да ли важи $a \cdot b = b \cdot a$ за следеће парове бројева:

а) $a = 352, b = -52$; б) $a = -589, b = 67$; в) $a = -2080, b = -84$.

Пример 2

Израчунај: $[(-43) \cdot (+6)] \cdot (-9)$ и $(-43) \cdot [(+6) \cdot (-9)]$.

Решење:

$$[(-43) \cdot (+6)] \cdot (-9) = (-|43 \cdot 6|) \cdot (-9) = (-258) \cdot (-9) = |258 \cdot 9| = 2322.$$

$$(-43) \cdot [(+6) \cdot (-9)] = (-43) \cdot (-|6 \cdot 9|) = (-43) \cdot (-54) = |43 \cdot 54| = 2322.$$

Производи су једнаки.

За све бројеве $a, b, c \in \mathbb{Z}$ важи $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, што значи да редослед груписања множилаца не утиче на резултат.

Другим речима, множење целих бројева је асоцијативна операција.

Задатак 2

Провери да ли важи $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ за следеће вредности:

а) $a = (-198), b = -50, c = 22$ б) $a = 115, b = -48, c = 75$.

Пример 3

Изračунај: $(156 + 82) \cdot (-7)$ и $[156 \cdot (-7)] + [82 \cdot (-7)]$. Шта запажаш?

Решење:

$$(156 + 82) \cdot (-7) = 238 \cdot (-7) = -|238 \cdot 7| = -1666;$$

$$[156 \cdot (-7)] + [82 \cdot (-7)] = (-|156 \cdot 7|) + (-|82 \cdot 7|) = (-1092) + (-574) = -(1092 + 574) = -1666.$$

Може се уочити да су вредности оба бројна израза једнаке.

За сваки $a, b, c \in \mathbb{Z}$ важе следеће једнакости
 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ и $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

Захваљујући комутативности множења и сабирања, важе и

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b \text{ и } c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$$

Другим речима, множење целих бројева је дистрибутивна операција у односу на сабирање и одузимање.

Задатак 3

За $a = -12$, $b = 40$, $c = -15$, $m = 25$, провери тачност једнакости

$$(a + b - c) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m - c \cdot m$$

Пример 4

Једна компанија за производњу топле одеће бележи губитке (компанија је „у минусу“) током зимских месеци. У јануару је губитак 3 000 евра, а у фебруару 2 000 евра. Компанија жели да израчуна укупне губитке за та два месеца, али жели и да процени колики би били губици током летње сезоне ако би били 3 пута већи у односу на збир губитака из јануара и фебруара. Израчунај укупне губитке за летњу сезону на два начина.

Решење:

Начин 1:

$(-3\,000 + (-2\,000)) \cdot 3 = (-5\,000) \cdot 3 = -15\,000$. Укупни губитак за јануар и фебруар је $-5\,000$ евра. Са очекиваним повећањем 3 пута, добијамо $-5\,000 \cdot 3 = -15\,000$ евра

Начин 2:

$$(-3\,000 + (-2\,000)) \cdot 3 = (-3\,000) \cdot 3 + (-2\,000) \cdot 3 = -9\,000 + (-6\,000) = -15\,000$$

$-3\,000 \cdot 3 = -9\,000$ - очекивани губитак у односу на јануар

$-2\,000 \cdot 3 = -6\,000$ - очекивани губитак у односу на фебруар

Укупно: $-9\,000 + (-6\,000) = -15\,000$ евра губитка у летњој сезони

Задатак 4

Студентска менза нуди меније за студенте по повољним ценама. Један мени садржи 3 пита и 2 чаше повртног смутија. Један студент купује 4 таква менија, а други узима 12 пита и 8 чаша смутија. Да ли су оба студента купила исти број производа?

Која је особина и на који начин искоришћена за олакшавање рачунања у бројном изразу $1997 \cdot (-4) = (2000 - 3) \cdot (-4) = 2000 \cdot (-4) - 3 \cdot (-4)$?

Наведи примере из свакодневног живота у којима се особине множења целих бројева могу искористити за ефикасније рачунање.

Препиши табелу у своју свеску и означи сваки ред једним од симбола:

☒ – разумем и могу да објасним, **?** – делимично разумем, **X** – не разумем.

Кому тативна особина	Асоцијативна особина	Дистрибутивна особина

Испод табеле напиши пример за сваку особину поред које си ставио/ла ☒

Самосталан рад

- а) Запиши кому тативну особину операције множења целих бројева.

б) Ако је $(-11) \cdot (+12) = -132$, колико износи $(+12) \cdot (-11)$?
- Користећи асоцијативну особину, попуни празнине у једначинама:

а) $((-99) \cdot (+28)) \cdot (-14) = * \cdot ((+28) \cdot (-14))$

б) $(+19) \cdot ((* \cdot (-47))) = ((+19) \cdot (-38)) \cdot (-47)$
- Провери дистрибутивну особину $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, ако је $a = -9$, $b = -4$, $c = -10$.
- а) Колико износи x ако је $(-45 + x) \cdot (-2) = (-45) \cdot (-2) + (-3) \cdot (-2)$?

б) Ако је $(-18 + 8) \cdot (-3) = 30$, колико онда износи $(-18) \cdot (-3) + (+8) \cdot (-3)$?
- Израчунај на најлакши могући начин: $(+50) \cdot (-25) \cdot (-2) \cdot (+4)$
- Искористи дистрибутивну особину и израчунај:

а) $3 \cdot 11 + 3 \cdot 22$ б) $(-14) \cdot (-8) + (-14) \cdot (-2)$
- Израчунај вредност израза користећи претходно дистрибутивну особину:

$4 \cdot (-8) + 2 \cdot (-8) + 5 \cdot (-8)$

Дељење целих бројева

У свакодневном животу често се сусрећеш са ситуацијама у којима је потребно нешто равномерно поделити. На пример, ако имаш 12 јабука и желиш да их поделиш једнако међу 4 пријатеља, сваки од њих ће добити по 3 јабуке. Ово је једноставан пример дељења у скупу природних бројева. Али, шта се дешава када радимо са целим бројевима, који укључују и негативне вредности? Да ли иста правила важе и када делимо негативан број? У овој лекцији ћеш истражити како функционише дељење у скупу целих бројева, која правила важе за знакове и како можеш да примениш ово знање у различитим ситуацијама. Важно је да разумеш да операција дељења није увек изводљива у скупу природних бројева, па тако и у скупу целих бројева постоје одређена ограничења. Као што је дељење у скупу природних бројева (N) дефинисано путем множења, тако се и дељење у скупу целих бројева (Z) заснива на истом принципу. Кроз ову лекцију ћеш научити да разликујеш изводљива и неизводљива дељења, како да одредиш количник и како правилно да примењујеш операције са целим бројевима у практичним примерима.



Пример 1

Ана, Бојан и Виктор су убрали 168 плодова у воћњаку и одлучили да их расподеле у три пакета.

- Да ли ће број плодова у сваком од три пакета бити природан број?
- Колико ће плодова бити у сваком пакету?
- Ако им се придруже још двојица пријатеља и желе да направе пакете тако да свако добије једнак број плодова, да ли је то могуће у скупу природних бројева?

Решење:

- Да бисмо проверили да ли ће сва тројица добити природан број плодова, треба да проверимо да ли је 168 дељиво са 3. Пошто је збир цифара броја 168 једнак 15 ($1+6+8=15$), а 15 је дељиво са 3, важи и да је 168 дељиво са 3. Дакле, сваки пакет ће садржати природан број плодова.
- $168 : 3 = 56$. То значи да, ако направе 3 пакета, у сваком ће бити по 56 плодова.
- Ако им се придруже још два пријатеља, број пакета треба да буде 5. Број 168 није дељив са 5. Зашто? Да ли ће се добити природан број?

У овом случају дељење није могуће у скупу природних бројева.

Нека су a и b два цела броја ($a, b \in \mathbb{Z}$). Поделити број a са бројем b значи пронаћи цео број c (ако такав постоји) такав да важи $b \cdot c = a$. Ако постоји такав цео број c , њега зовемо количник, a је делилац, а b је делитељ. Тада кажемо да је b делитељ броја a и пишемо: $b \mid a$.

Пример 2

Пронаћи цео број x (ако постоји) за који важи $12 \cdot x = 84$.

Решење:

Делимо $84 : 12$ и добијамо $x = 7$.

При дељењу два цела броја, могућа су два случаја. Дељеник и делилац имају исте знакове (оба су позитивна или оба негативна). Дељеник и делилац имају различите знакове.

Пример 3

Израчунај непознати број у једначини:

а) $8 \cdot x = 128$ б) $(-15) \cdot x = 165$

Решење:

а) Производ у једначини $8 \cdot x = 128$ је позитиван број. Да би производ био позитиван, оба множиоца морају бити или позитивна или негативна. Пошто је број 8 позитиван, и непознати број x мора бити позитиван. Израчунавамо: $x = |128 : 8| = 16$, јер важи: $8 \cdot 16 = 128$.

б) У једначини $(-15) \cdot x = 165$ имамо један негативан чинилац. Да би производ био позитиван (+165), други чинилац x мора бити негативан. Израчунавамо: $x = 165 : (-15) = -11$, јер важи: $(-11) \cdot (-15) = +165$.

Осообина из овог примера уопштено гласи:

Количник два цела броја са истим знацима, ако постоји Z , је позитиван број. Ако $a, b \in \mathbb{Z}^+$ или $a, b \in \mathbb{Z}^-$ и $b \mid a$, онда важи $a : b = |a| : |b|$

Пример 4

Израчунај непознати број x :

а) $(-13) \cdot x = -260$ б) $x \cdot 23 = -184$

а) Решење једначине је позитиван број. Пошто је производ -260 негативан, чиниоци морају имати различите знакове. Пошто је -13 негативан, онда x мора бити позитиван. Израчунавамо: $x = (-260) : (-13) = |260 : 13| = 20$.
Провера: $(-13) \cdot 20 = -260$.

- б) Решење једначине је негативан број. Производ је негативан, а један чинилац (23) је позитиван, па други (x) мора бити негативан: $x = -184 : 23 = -(184 : 23) = -8$
 Провера: $-8 \cdot 23 = -184$

Количник два цела броја са различитим знаковима, ако постоји Z , је негативан број.
 Ако $a \in Z^+$, $b \in Z^-$ или $a \in Z^-$, $b \in Z^+$ и $b \mid a$, онда: $a : b = -(|a| : |b|)$

Пример 5

Пронађи цео број x (ако постоји) за који важи $7 \cdot x = 37$.

Решење:

Број 37 не може да се представи као производ броја 7 и неког целог броја, па такав број x не постоји.

Задатак 1

Израчунај количнике:

- | | | | |
|----------------|-------------------|------------------|---------------------|
| а) $1248 : 24$ | б) $(-96) : (-8)$ | в) $2016 : 32$ | г) $(-338) : (-26)$ |
| д) $(-80) : 5$ | е) $1856 : (-29)$ | ж) $(-364) : 14$ | з) $2117 : (-73)$ |

Задатак 2

Ако је $a \in Z$, објасни зашто важи:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| а) $a : 1 = a$ | б) $a : 0$ не постоји (нема смисла) | в) $a : (-1) = -a$ |
| г) $a : a = 1$ за $a \neq 0$ | д) $0 : a = 0$ за $a \neq 0$ | е) $a : (-a) = -1$ за $a \neq 0$ |

Пример 6

Једна фирма је, због неуспешне рекламне кампање, забележила финансијски губитак од 84 000 динара. Тај губитак можемо представити као негативан број: $-84\,000$.

Губитак је равномерно распоређен на 7 маркетинг-пројеката.

Одреди колики је губитак по пројекту.

Решење:

Губитак $= -84\,000$, број пројеката $= 7 \rightarrow$ позитиван број.

Пошто делимо бројеве различитих знакова, количник ће бити негативан,

$$x = (-84\,000) : 7 = -12\,000$$

Провера: $(-12\,000) \cdot 7 = -84\,000$ је у складу са губитком. Сваки пројекат носи губитак од 12 000 динара.

Задатак 3

У игри је Тома добио негативан резултат од -90 поена због неуспешних скокова. Ако се овај негативан резултат равномерно расподели на 5 скокова, одреди колико је поена Тома губио по скоку.

Како ти правилно разумевање операције дељења целих бројева, нарочито када радимо са негативним бројевима, може помоћи у доношењу јаснијих одлука у свакодневном животу — на пример, при расподели трошкова или ресурса?

„Математички семафор“

У својој свесци

- Стави Црвено ● (Значи: Потребна ми је помоћ!)
Напиши једно питање или део који ти је најнејаснији.
- Жуто ● (Значи: Делимично разумем, али имам неке недоумице!)
Напиши један задатак који можеш да решиш и један који ти прави потешкоће.
- Зелено ● (Значи: Разумем и могу да објасним другару!)
Напиши један свој пример задатка са дељењем целих бројева и његово решење.

Самосталан рад

- Израчунај:
а) $(+56) : (+8)$ б) $(-36) : (-12)$ в) $(+117) : (-1)$ г) $(-585) : (-15)$ д) $(+54) : (-9)$
е) $0 : (-12)$ ж) $(+374) : (-1)$ з) $(-148) : (+37)$ а) $(-32) : (+8)$ с) $(+200) : (-10)$
- Нађи вредност израза $y : 12$ за: а) $y = 48$ б) $y = -156$
- Реши једначине:
а) $(-88) : x = 8$ б) $(+45) \cdot x = -540$ в) $(-533) \cdot x = +41$ г) $x \cdot (+79) = -790$
- Разлику бројева -27 и 9 подели њиховим збиром.
- Ако се неки број помножи са -24 , добија се производ бројева -8 и 21 . Који је то број?
- Биљана је замислила број. Када је тај број помножила са збиром бројева -14 и 44 , добила је количник бројева -390 и 13 . Који број је замислила Биљана?
- Шта можемо да закључимо о делиоцу и делитељу два цела броја ако:
а) њихов количник је $+1$? б) њихов количник је -1 ? в) њихов количник је 0 ?
- Који се број добија ако се количник бројева $+65$ и -13 увећа за количник бројева -50 и -10 ?

Вредност бројног израза

Замисли да си у продавници и треба да израчунаш колико ћеш платити ако купиш 3 чоколаде по 50 динара и 2 сока по 80 динара. Уместо да рачунаш одвојено, можеш да саставиш израз: $3 \cdot 50 + 2 \cdot 80$. Када израчунаш вредност овог израза, добијаш тачан износ за плаћање. Ово је пример бројне вредности израза – коначни резултат који се добија када се изврше све операције.

У овој лекцији ћеш научити шта је бројни израз, како се израчунава његова бројна вредност и како правилно да се примењује редослед операција. На крају лекције моћи ћеш брзо и тачно да израчунаваш вредности бројних израза и да их користиш у свакодневним ситуацијама.

2744.24	- 200.31	= 2543.93
2543.93	- 1788.00	= 755.93

1788.00	+ 1.000.00	= 2.788.00
2.788.00	- 1.200.00	= 1.588.00

1.588.00	+ 1.500.00	= 3.088.00
3.088.00	- 2.000.00	= 1.088.00
1.088.00	- 100.00	= 988.00

Пример 1

Марија штеди новац за нову књигу. Сваке недеље ставља по 250 динара у касицу. После 4 недеље, њена бака јој додаје још 600 динара.

- Састави бројни израз који представља укупан износ који ће Марија имати после 4 недеље.
- Израчунај бројну вредност израза.

Решење:

- Прво израчунавамо износ који Марија уштеди за 4 недеље: $4 \cdot 250$, на то додајемо новац од баке и добијамо израз $(4 \cdot 250) + 600$.
- Израчунавамо бројну вредност $1\,000 + 600 = 1\,600$ динара. Марија ће имати 1 600 динара после 4 недеље. Овај проблем те подсећа како се саставља бројни израз и како се правилно израчунава његова бројна вредност у скупу природних бројева.

Задатак 1

Збир бројева 1 326 и 879 умањи за разлику бројева 453 и 191.

Изрази састављени од бројева, повезани знацима математичких операција (могу садржати и заграде), називају се бројни изрази.

Број који се добије након извршења свих операција у изразу назива се бројна вредност израза.

Често кажемо да су два бројна израза једнака ако имају једнаку бројну вредност.

Пример 2

Израчунај бројну вредност израза: $5 \cdot [(-21) - (60 - 12) : (-8)]$

Решење:

$$5 \cdot [(-21) - (60 - 12) : (-8)] = 5 \cdot [(-21) - 48 : (-8)] = 5 \cdot [(-21) - (-6)] = 5 \cdot [(-21) + (+6)] = 5 \cdot (-15) = -75$$

Приликом израчунавања бројне вредности неког израза потребно је познавати следеће:

1. Операције сабирања и одузимања називају се операцијама првог реда, а операције множења и дељења операцијама другог реда. Операција степеновања често се назива операцијом трећег реда.
2. У бројним изразима без заграда, састављеним само од операција првог реда или само од операција другог реда, договорено је да предност има операција која се налази лево, односно операције се извршавају редом с лева на десно.
3. У бројним изразима без заграда који садрже операције различитог реда, операције вишег реда имају предност, а операције истог реда се извршавају редом како су написане — с лева на десно.
4. У бројним изразима са заградама, најпре се израчунава вредност израза у заградама, према правилима под 2 и 3, а затим се на добијени израз поново примењују иста правила.

Укратко, редослед извршавања операција у бројном изразу је:

1. Заграде
2. Степеновање
3. Множење и дељење (с лева на десно)
4. Сабирање и одузимање (с лева на десно)

Пример 3

Израчунај: $(-24) - [48 : (-6)]$, $[(-24) - 48] : (-6)$, $(-24) - 48 : (-6)$

Објасни редослед операција који користиш.

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а) } (-24) - [48 : (-6)] &= \text{Рачуна се у загради, остатак израза се преписује} \\ &= (-24) - (-8) = (-24) + (+8) = -16 \end{aligned}$$

б) $[(-24) - 48] : (-6) =$ Рачуна се у загради, остатак израза се преписује
 $= (-72) : (-6) = 12$

в) $(-24) - 48 : (-6) =$ Приоритет операције вишег реда, остатак израза се преписује
 $= (-24) - (-8) = (-24) + (+8) = -16$

Шта мислиш, зашто бројни изрази $(-24) - [48 : (-6)]$ и $(-24) - 48 : (-6)$ имају исту бројну вредност? Да ли заграде у првом изразу могу да се изоставе и зашто?

Задатак 2

Изрчунај вредност бројног израза:

а) $(+23) + (-48) - (-79)$

б) $7 \cdot (-21) + 52 : (-13)$

в) $(-60) \cdot (-5) : 6 \cdot (-9)$

г) $294 : [(-18) - (-15)] + (-47) \cdot 2$

д) $5 \cdot (-21) - [(-21) - (60 - 12) : (-8)]$

е) $18 - 34 + 27 - 52 + 18 - 13$

Пример 4

Пресметај: а) $(-15) + (-7)$ б) $(-15) - (-7)$ в) $-(-15) + (-7)$ г) $+(-15) - (+7)$

Решење:

а) $(-15) + (-7) = -15 - 7 = -22$

б) $(-15) - (-7) = -15 + 7 = -8$

в) $-(-15) + (-7) = +15 - 7 = +8$

г) $+(-15) - (+7) = -15 - 7 = -22$

Пре израчунавања, бројни изрази су написани без заграда. Шта можеш да приметиш?

$-(-a) = +a \rightarrow$ супротан броју $-a$ је број $+a$

$-(+b) = -b \rightarrow$ супротан броју $+b$ је број $-b$

Пример 5

Изрчунај вредност израза:

а) $(-14) + (-28) + (+40)$

б) $125 - (-49) - (+25)$

Решење:

а) $(-14) + (-28) + (+40) = -14 - 28 + 40 = -42 + 40 = -2$

б) $125 - (-49) - (+25) = 125 + 49 - 25 = 174 - 25 = 149$

Ако се испред заграде у једном изразу налази знак $+$, тада се тај знак и заграда испред које стоји изостављају (бришу), а све остало остаје непромењено. Ако се испред заграде у једном изразу налази знак $-$, тада се тај знак и заграда бришу, а знакови испред бројева у загради се мењају у супротне (плус у минус и минус у плус).

Задатак 3

Збир бројева (-62) и $(+130)$ помножи њиховом разликом.

Пример 5

Одреди вредност следећег бројног израза: $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12$

Решење:

У датом изразу $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12$, прво израчунавамо апсолутне вредности $|-8| = 8$ и $|-5| = 5$, затим заменимо у израз $8 + 3 \cdot 5 - 12$. У изразу прво извршавамо множење, као операцију вишег реда, и добијамо: $8 + 15 - 12$. Сабирамо и одузимамо редом слева надесно: $23 - 12 = 11$, односно:
 $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12 = 8 + 3 \cdot 5 - 12 = 8 + 15 - 12 = 23 - 12 = 11$.

Задатак 4

Израчунај вредност израза $|9 - 11| \cdot 16 - (46 - 2 \cdot (-13)) - |-123|$.

Пример 6

Разлику изм еђу највећег двоцифреног целог негативног броја и најмањег двоцифреног целог позитивног броја помножи најмањим троцифреним целим негативним бројем.

Решење:

Прво запиши бројеве према датом услову за сваки од њих. Највећи негативан цели број са две цифре је -10 , најмањи позитиван цели број са две цифре је 10 , а најмањи негативан цели број са три цифре је -999 . Затим запишемо и израчунамо израз:
 $((-10) - (+10)) \cdot (-999) = (-10 - 10) \cdot (-999) = (-20) \cdot (-999) = 19\,980$

Задатак 5

Разлику између бројева 200 и -426 умањи за количник бројева -360 и -12 .

Задатак 6

Бојан је играо 7 пута исту игру и освојио следеће бројеве поена: $+13, -8, -16, +10, +4, +18$ и -7 . Израчунај колико је у просеку освајао поена по игри.

Задатак 7

Дејан ради као инжењер у високој згради чији су спратови означени бројевима од -3 до 18. Он треба да надгледа рад на свим спратовима и више пута се креће лифтом, горе и доле. Полазећи са 11 спрата, силази 3 пута по 4 спрата надоле, а затим се пење 2 пута по 5 спратова нагоре. На ком спрату се сада налази Дејан?

Задатак 8

Весна на својој картици има заостале рачуне за мобилни телефон за месеце јануар, фебруар и март, по 963 динара, које треба да плати. Након плаћања, на картицу добија 7 800 динара за обављен посао. Запиши израз за израчунавање стања на картици користећи целе бројеве и израчунај га.

Задатак 9

Штедионица прави завршни обрачун на крају године. Она дугује 45 клијената по 12 300 динара, а од 62 клијента потражује по 10 450 динара и од 213 клијената потражује по 3 500 динара. Какав је резултат завршног обрачуна? Да ли штедионица завршава годину са добитком?

Ако у бројном изразу имамо комбинацију апсолутних вредности и операција као што су сабирање, одузимање, множење и дељење, како треба да примењујемо правила редоследа операција да бисмо добили тачан резултат? Да ли постоје ситуације у којима примена апсолутне вредности може да промени бројну вредност израза и како то утиче на коначан резултат?

У свесци одговори на следећа питања:

1. Шта сам данас научио/научила? (Кратак опис основног појма који си разумео/ла.)
2. Шта ми је било најтеже? (Препознавање проблема или појмова који су били тежи за разумевање.)
3. Како ћу применити ове информације у будућности? (Како видиш практичну употребу онога што си научио/ла.)

Оцени самог/саму себе по скали:

- 5 – Одлично, у потпуности разумем и могу да применим научено.
- 4 – Добро, али ми је потребно мало понављања да бих био/била сигуран/на.
- 3 – Разумео/ла сам део градива, али морам више да се потрудим.
- 2 – Има још много тога што не разумем.
- 1 – Ништа не разумем од онога што је објашњено.

На крају можеш укратко поделити са наставником или саучеником/цом да ли имаш неко питање или шта ти је било најкорисније из лекције.

Самосталан рад

1. Пронађи вредност бројевних израза:

а) $(-21) + (-1) \cdot (+42) - (+24) : (-8)$ б) $(-32) : (+8) - (+12) + (-21) : (+3)$

2. Израчунај вредност израза, претходно се ослободи заграда:

$(-18) : (+3) - (-5) + (-17) \cdot (+2)$

3. Запиши израз помоћу заграда:

а) $-15 \cdot 3 - 48 + 2 \cdot 30 - 0:11$

б) $-57 - 18 : 3 + 2 \cdot 17 - 6$

4. Израчунај разлику између производа бројева -10 и 9 и количника бројева -99 и -33 .

5. Израчунај:

а) $-12 : 6 - 5 \cdot [14 - (2 - 5)]$ б) $(4 - 9) \cdot 3 - 28 : [-13 - 2 \cdot (-3)]$

6. Израчунај $(3a + b) : c$ ако $a = -13$, $b = -69$, $c = -6$.

7. Пронађи бројну вредност израза:

а) $(+1) : (-1) + (-2) : (-1) + (+3) : (-1)$ б) $(2 - 18) : [(-2) : 1]$

Степен са природним бројем као показатељем

У свакодневном животу често се сусрећемо са великим бројевима, нарочито у математици, природним наукама и технологији. Уместо да их записујемо са великим бројем цифара, користимо краће записе помоћу операције степеновања. У овој лекцији ћеш научити: шта значи степеновање и како се користи, шта представљају основа, показатељ и вредност степена и – како се израчунава вредност степена када је показатељ природан број.

Ово знање је основа за касније математичке појмове као што су множитељи, квадратни и кубни бројеви.





Пример 1

Ана жели да направи ограду око свог цветног врта. Одлучила је да користи дрвене стубиће, постављајући по 3 стубића у сваком реду, а редови да се понове 7 пута.

- Запиши колико ће укупно стубића Ана искористити као збир једнаких сабирака.
- Запиши израз као множење.

Решење:

- Пошто у сваком реду има 3 стубића, а ред се понавља 7 пута, укупан број стубића можемо записати као збир једнаких сабирака: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$.
- Исти прорачун можемо представити као множење: $7 \cdot 3 = 21$.
Ако Ана направи исту ограду за 5 таквих цветних вртова, колико ће јој стубића бити потребно?

Задатак 1

У библиотеци је било 12 полица, а на свакој полици по 50 књига. Током једне недеље, 15 ученика је узело по 2 књиге. Колико књига је остало у библиотеци након што су ученици узели оно што им је требало?

Пример 2

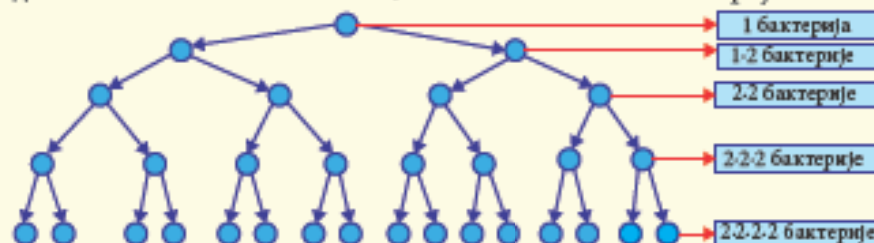
Научници проучавају нову врсту бактерија које се деле на две сваких 15 минута. Истраживање почиње са једном једином бактеријом.

- Запиши помоћу множења колико ће бактерија бити после 1 сата.
- Представи број бактерија после 1 сата као степен.
- Ако се ово дељење настави непромењено 3 сата, запиши коначан број бактерија као степен и израчунај његову вредност.



Решење:

- Пошто се бактерија удвостручује сваких 15 минута, за 1 сат (60 минута) десит ће се 4 деобе: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Значи, после 1 сата биће 16 бактерија.



- б) Краће множење четири двојке можемо записати као степен: $2^4 = 16$.
- в) Ако процес траје 3 сата, за то време ће се догодити укупно: $3 \cdot 4 = 12$ деоба.
Укупан број бактерија ће бити: 2^{12} .
Израчунавањем вредности добијамо: $2^{12} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4\,096$. Дакле, након 3 сата број бактерија ће износити 4 096.

Множење истог броја више пута назива се степеновање и записује се у облику: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-ПАТИ}} = a^n$.

Број a^n , где је $n \in \mathbb{N}_0$, назива се степен са основом a и степеним показатељем (експонентом) n .

Израчунавањем $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ добија се вредност степена a^n .

Поступак израчунавања вредности степена назива се степеновање. По договору, за сваки број a важи: $a^0 = 1$, а операција степеновања има предност у односу на множење, тако да уместо $m \cdot (a^n)$ пишемо $m \cdot a^n$.

У примеру 2 под б), $2^4 = 16$, 2 је основа степена, 4 је степени показатељ, а 16 је вредност степена.

Запиши основу, степени показатељ и вредност степена у примеру под в).

Задатак 2

Марко и Петар учествују на математичком такмичењу на коме треба да осмисле сопствени систем за мерење дужине, користећи степеновање. Одлучују да ће основна јединица дужине бити 1 корак, а да ће сваки наредни ниво повећавати растојање троструко у односу на претходни.

- Запиши растојање на сваком од наредних пет нивоа, користећи множење.
- Прикажи исто растојање користећи степене броја 3.
- Ако осми ниво представља укупно пређено растојање, изрази то растојање као степен и израчунај његову вредност.

Задатак 3

Запиши првих 10 степена броја 10 са природним бројем као експонентом и израчунај њихове вредности. Шта примећујеш?

Пример 3

Марко одлучује да прве недеље засади 3 цвета, а сваке наредне недеље да удвостручи број новозасађених цветова у односу на претходну недељу.

- Запиши колико нових цветова ће Марко засадити током првих 6 недеља помоћу множења.
- Представи број новозасађених цветова сваке недеље користећи степен.
- Израчунај колико ће укупно цветова Марко засадити након 6 недеља.

Решење:

- Пошто Марко удвостручује број цветова сваке недеље, добијамо: 3, 3·2, 3·2·2, 3·2·2·2, 3·2·2·2·2, 3·2·2·2·2·2. Број цветова по недељама је: 3, 6, 12, 24, 48, 96
- Исто можемо записати помоћу степеновања: 3, 3·2¹, 3·2², 3·2³, 3·2⁴, 3·2⁵
- Да бисмо израчунали укупан број засађених цветова после 6 недеља, сабирамо број цветова из сваке недеље:

$$3 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189.$$
 Значи, после 6 недеља Марко ће имати укупно 189 цветова.

Задатак 4

Емилија ради у малој фабрици која производи и пакује кутије. Она почиње са 5 паковања кутија првог дана, а сваког наредног дана прави троструко више паковања него претходног дана.

- Запиши колико паковања кутија ће Емилија направити током прва 4 дана помоћу множења.
- Представи број направљених паковања за сваки дан користећи степен.
- Израчунај укупан број паковања које ће Емилија направити након 4 дана.

Како би описао разлику између степена са различитим основама и истим показатељима (нпр. 2³ и 3³)? Какве су њихове вредности? Шта се дешава ако основа остане иста, а мења се само показатељ?

Прикажи поступак израчунавања и објасни како различити показатељи утичу на вредност степена.

- Да ли могу правилно да запишем степен са природним показатељем за различите основе?
 - Не могу да запишем степен
 - Могу да запишем степен, али понекад грешим
 - Могу да запишем степен тачно и брзо

3. Да ли могу да израчунам вредност степена са показатељем природни број?
 - 1 = Не могу да израчунам
 - 2 = Могу да израчунам уз помоћ
 - 3 = Могу да израчунам самостално и тачно
4. Да ли могу да применим степене у контекстима из свакодневног живота, на пример, при расту популације и слично?
 - 1 = Не могу да повежем степен са свакодневним контекстом
 - 2 = Могу уз помоћ примера
 - 3 = Могу самостално да применим степен у различитим ситуацијама
5. Да ли разумем како степени са великим показатељима расту врло брзо и зашто је то важно у математици?
 - 1 = Не разумем
 - 2 = Разумем делимично
 - 3 = Потпуно разумем и могу да објасним

Ако већина одговора је испод 3, то значи да си успешно савладао све стандарде ове лекције.

Ако имаш више одговора испод 2, можда треба поновити неке делове лекције.

Ако си највише одговорио са 1, посаветуј се са наставником за додатну помоћ и вежбе.

Самосталан рад

1. Запиши као степен производе:
 - а) $7 \cdot 7 \cdot 7$
 - б) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$
 - в) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$
2. Стави као производ степене:
 - а) 5^4
 - б) $(-3)^5$
 - в) $(x + y)^3$
3. Израчунај вредност степена:
 - а) 5^4
 - б) $(-10)^5$
 - в) 3^4
4. Израчунај вредност израза:
 - а) $2^3 - 3^3$
 - б) $5^3 (-3)^4 + 2^2 - (-7)^2$
 - в) $2^4 \cdot 3^2 + 5^2 : 5^2$

5.* Провери шта је тачно:

- а) $(-2)^{11} < 0$ б) $(-2)^{22} > 0$ в) $-2^{22} > 0$ г) $(-5)^3 \cdot (-7)^3 > 0$
д) $a^3 \cdot b^3 > 0$, за $a > 0, b > 0$ е) $a^3 \cdot b^3 < 0$, за $a < 0, b < 0$

6. За које природне бројеве n важи следећи израз?

- а) $1^n = 1$ б) $0^n = 0$ в) $2^n > 0$ г) $(-3)^n > 0$ д) $(-5)^n < 0$

7. За коју вредност n важи:

- а) $2^n = 16$ б) $(-3)^n = -27$

8. Један УСБ уређај има капацитет од 2^8 гигабајта. Колико гигабајта има уређај?

9. Бактерија се удвостручава сваки сат. Ако на почетку има 3 бактерије, колико ће их бити после 5 сати?

- а) Запиши помоћу степена бројни израз за добијање броја бактерија после 5 сати.
б) Запиши колики ће бити број бактерија после n сати.

Квадрати и квадратни корени до 100

Знање које ћеш стећи обрадом ове лекције представља основу за даље учење математичких појмова и помоћи ће ти у решавању различитих задатака и проблема. Научићеш како да препознаш квадрате и да израчунаш њихове квадратне корене, као и како да користиш те вештине у свакодневном животу и у даљем учењу математике.



Пример 1

Мехмедов отац имао је два магацина. У првом магацину било је 425 kg брашна, а у другом је имао три пута више него у првом. Отац је продао 40% од укупне количине брашна из оба магацина. Колико је брашна остало у магацинима?

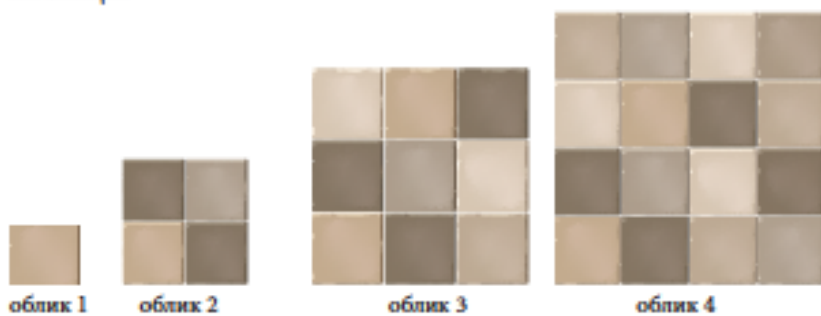
Решење:

Количина брашна у другом магацину је: $3 \cdot 425 = 1\,275$ kg. Значи, у другом магацину има $1\,275$ kg брашна. Укупна количина брашна у оба магацина је: 425 kg + $1\,275$ kg = $1\,700$ kg. Количина брашна која је продата (40 % од укупне количине) је: 40 % од $1\,700$ kg је: $0,4 \cdot 1\,700 = 680$ kg. Мехмедов отац је продао 680 kg брашна.

У оба магацина након продаје остало је: $1\,700$ kg – 680 kg = $1\,020$ kg. Укупно је у магацинима остало $1\,020$ kg брашна.

Пример 2

Јанко ређа квадратне плочице у парку. Облици које добија приликом ређања приказани су на слици.



- Запиши укупан број плочица које су искоришћене у сваком облику појединачно.
- Запиши број употребљених плочица у сваком облику као степен броја.
- Колико плочица ће имати пети, шести, седми облик?

Решење:

- У облику 1 има 1 плочица, у облику 2 има 4 плочице, у облику 3 има 9 плочица, у облику 4 има 16 плочица.
 - Број употребљених плочица у сваком облику записан као степен броја је:
 $1^2 = 1$, чита се „један на квадрат је једнако један“,
 $2^2 = 4$, чита се „два на квадрат је једнако четири“,
 $3^2 = 9$, $4^2 = 16$.
 - Из начина ређања облика уочавамо да је у сваком облику број редова исти као број плочица у једном реду. Тако, у петом облику биће $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, у шестом $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$, а у седмом $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$,...
- Бројеве 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,... називамо пуни квадрати или квадратни бројеви.

Број који може да се запише као производ два иста чиниоца назива се пун квадрат или квадратни број.

Задатак 1

Запиши све пуне квадрате од 1 до 100.

Задатак 2

- а) Колико износи девети пун квадрат? б) Да ли је 68 пун квадрат неког броја?

Пример 3

Дат је квадратни број 64. Чији квадрат је 64?

Решење:

Да бисмо одговорили на питање, треба да нађемо који број помножен сам са собом даје производ 64. Постоје два таква броја: +8 и -8, јер је $8^2 = 64$ и $(-8)^2 = 64$. За сада ћемо се задржати само на позитивним (природним) бројевима и њиховим квадратима.

Записаћемо: $\sqrt{64} = 8$ (чита се „квадратни корен из броја 64 је једнако 8“).

Слично као у примеру 3: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, ...

Број b се назива квадратни корен броја a ако важи: $b^2 = a$ (пишемо: $b = \sqrt{a}$).

Задатак 3

Запиши квадратне корене бројева: 16, 25, 36, 49, 64, 81 и 100.

Задатак 4

Запиши следеће бројеве као збир два квадратна броја:

- а) 13 б) 29 в) 45

Пример 4

Марко има двориште у облику квадрата са површином од 49 квадратних метара. Колика је страна дворишта?

Решење:

Заправо, задатак тражи да се одреди квадратни корен из броја 49.

Пошто је $7 \cdot 7 = 49$, добијамо да је дужина стране Марковог дворишта 7 m.

Задатак 5

Три собе у стану породице Јанковски су у облику квадрата са површинама: 25 m^2 , 36 m^2 и 16 m^2 . Колики је периметар сваке собе?

Миле каже да пун квадрат никада не завршава цифром 3. Да ли је у праву? Објасни на крају.

У свеску запиши одговоре на следећа питања:

1. Да ли могу да препознам квадратне бројеве до 100? (Да/Не)
2. Да ли могу да нађем квадратни корен од квадратног броја? (Да/Не)
3. Да ли могу да применим појам квадратних бројева у стварним примерима (на пример, израчунавање површине квадратних објеката)? (Да/Не)

Самосталан рад

1. Израчунај:
а) $\sqrt{225}$ б) $\sqrt{625}$ в) $\sqrt{400}$
2. Ако је $x^2 = 81$, које су могуће вредности за x ?
3. Јован жели да огради башту у облику квадрата чија је површина 144 m^2 . Колика је дужина стране баште? Израчунај колико метара жице је потребно Јовану да огради башту.
4. Ако башта у облику квадрата има страну од 11 m , колика је њена површина?
5. Формула за израчунавање растојања до препреке на основу еха је: $d = \sqrt{t}$, где је d растојање у метрима, а t време у секундама. Ако се ехо врати након 9 секунди, колико је растојање до препреке?
6. Марија жели да купи тепих који ће прекрити цео под квадратне дечје собе. Зна да је површина просторије 81 квадратни метар. Жели да сазна колика треба да буде дужина тепиха како би прекрио цео под.
7. Радник у магацину треба да поређа 225 једнаких кутија у облику савршеног квадрата (једнак број кутија по реду и по колони). У колико редова и колона су поређане кутије?
8. У школи су ученици засадили 256 украсних цветова тако да формирају савршен квадрат, са једнаким бројем редова и колона. Колико цветова има у сваком реду?

Поређење разломака

Разломци се користе као начин за представљање делова целине. У свакодневном животу често треба да поредимо разломке — на пример, када поредимо ко је појео већи део пице или ко је прешао већи део пута. Да бисмо правилно поредили разломке, потребно је да разумемо шта треба да урадимо да би поређење било лакше. У овом часу ћеш се подсетити неких од начина за поређење и ређање разломака које си учио у шестом разреду:

- Свођење на исти именилац
- Свођење на исти бројилац
- Коришћење дијаграма – визуелно поређење величине разломака.

Такође, научићеш да поредиш разломке и тако што ћеш их претворити у децималне бројеве. Употребом неке од ових стратегија, моћи ћеш тачно да одредиш који је разломак већи или мањи и да их поређаш по величини.



Пример 1

Јасмина много воли чоколаду. Како треба да изабере у сваком од задатака под а, б и в да би узела већи комад?

- а) Један комад је $\frac{6}{10}$ чоколаде, а други је $\frac{7}{10}$ чоколаде.
б) Један комад је $\frac{5}{8}$ чоколаде, а други је $\frac{5}{16}$ чоколаде.
в) Један комад је $\frac{3}{7}$, а други је $\frac{7}{10}$ чоколаде.

Решење:

- а) Чоколада је подељена на једнаке делове, али већи је комад који има више тих делова, односно комад од $\frac{7}{10}$. Дакле, Јасмина ће изабрати $\frac{7}{10}$, јер $\frac{7}{10} > \frac{6}{10}$.
- б) Оба разломка имају исти бројилац, али различите имениоце. Већи су делови добијени дељењем чоколаде на мањи број парчића. Јасмина ће изабрати $\frac{5}{8}$, јер $\frac{5}{8} > \frac{5}{16}$.
Подсетник: Од два разломка са истим бројиоцима, већи је онај са мањим имениоцем.
- в) Како ћемо упоредити разломке? Седмине су веће од десетина, али их има мање. Упоредићемо разломке тако што ћемо их проширити на исти именилац.
Тако добијамо: $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 10}{7 \cdot 10} = \frac{30}{70}$ и $\frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 7}{10 \cdot 7} = \frac{49}{70}$. $\frac{49}{70} > \frac{30}{70}$, односно $\frac{7}{10} > \frac{3}{7}$.

Пример 2

Стави одговарајући знак $<$, $=$, $>$:

- а) $\frac{2}{3}$ и 1 б) $\frac{7}{4}$ и 1 в) $\frac{5}{5}$ и 1

Решење:

- а) $\frac{2}{3}$ је правилан разломак и значи две трећине од једне целине, а 1 означава једну целину која има три трећине. Дакле, $\frac{2}{3} < \frac{3}{3}$ односно $\frac{2}{3} < 1$.
 б) Разломак $\frac{7}{4}$ је неправиан разломак, па $\frac{7}{4} > 1$, пошто $\frac{7}{4} > \frac{4}{4}$
 в) $\frac{5}{5} = 1$. Зашто?

Сваки правилан разломак је мањи од 1, а сваки неправиан разломак је већи или једнак 1. Често се уместо појма „правиан разломак“ користи и израз „исправан разломак“, али оба термина имају исто значење.

Задатак 1

Упореди разломке:

- а) $\frac{1}{13}$ и $\frac{7}{11}$ б) $\frac{3}{7}$ и $\frac{3}{9}$ в) $\frac{5}{14}$ и $\frac{3}{8}$ г) $\frac{4}{9}$ и $\frac{7}{9}$ д) $\frac{17}{24}$ и $\frac{17}{19}$

Пример 3

Вања је искористила $\frac{14}{20}$ цвећа за прављење букета, а Мелек је искористила $\frac{3}{5}$ цвећа.

- а) Запиши разломке као децималне разломке.
 б) Запиши те децималне разломке као децималне бројеве.
 в) Која од њих је искористила мање цвећа за прављење букета?

Решење:

- а) $\frac{14}{20} = \frac{14 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{70}{100}$. Дропката ја проширујемо са 5. Зашто?
 Сега дропката $\frac{3}{5}$ ја проширујемо са 20. Зашто? $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100}$.
 б) $\frac{60}{100} = 0,60$ и $\frac{70}{100} = 0,70$.
 Објасни зашто $\frac{6}{10} = \frac{60}{100} = \frac{600}{1000}$. Ако ги запишемо дропките како децимални бројеви, имамо: $0,6 = 0,60 = 0,600$.
 Исто така, $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$ или $0,70 = 0,7$. Добиениот број 0,70 можемо да го запишемо како 0,7. Зашто?
 в) Бидејќи $0,7 > 0,6$, значи $\frac{14}{20} > \frac{3}{5}$. Значи, Вања искористила повеќе цвеќиња од Мелек.

Отуда можемо да запишемо два својства децималних бројева:

Децимални број се не мења ако се са његове десне стране додају нуле.
Децимални број се не мења ако се са његове десне стране изоставе нуле после којих нема ненултих цифара.

Пример 4

Коле је купио $\frac{2}{5}$ kg кромпира и $\frac{3}{8}$ kg црног лука. Шта је Коле више купио?

Решење:

Знаш да разломачка црта значи дељење. Дељењем бројиоца имениоцем можеш записати разломак као децимални број.

Имамо $\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$ и $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375$. Сада треба упоредити два децимална броја. То си учио у шестом разреду. Децимални број 0,4 има више десетина од децималног броја 0,375. Значи $0,4 > 0,375$, односно $\frac{2}{5} \text{ kg} > \frac{3}{8} \text{ kg}$. Коле је купио више кромпира. Када знаш својства децималних бројева, за лакше поређење, можеш их записати са истим бројем децимала, односно $0,4 = 0,400$. Имаш $0,400 > 0,375$, односно $\frac{2}{5} \text{ kg} > \frac{3}{8} \text{ kg}$.

При поређењу разломака, можеш их претходно записати као децималне бројеве дељењем бројиоца имениоцем, а затим поредити децималне бројеве.

Задатак 2

Упореди разломке након што их претходно запишеш као децималне бројеве:

- а) $\frac{17}{50}$ и $\frac{7}{20}$ б) $\frac{103}{1000}$ и $\frac{1}{8}$ в) $\frac{4}{125}$ и $\frac{8}{25}$ г) $\frac{19}{8}$ и $2\frac{2}{5}$

Пример 5

На школском спортском такмичењу четири ученика су учествовала у трци и претрчала различите делове стазе пре него што су стали да се одморе. Дужина стазе је иста за све, а резултати су: Јана је претрчала $\frac{3}{5}$ стазе, Марко је претрчао $\frac{1}{8}$ стазе, Ивана је претрчала $\frac{3}{4}$ стазе, а Петар је претрчао $\frac{5}{10}$ стазе.

- а) Који ученик је претрчао највећи део стазе?
б) Који ученик је претрчао најмањи део стазе?
в) Поређај резултате ученика од оног који је претрчао најмање до оног који је претрчао највише.

Решење:

Разломке ћемо записати као децималне бројеве:

$$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0,6 = \text{уз примену првог својства} = 0,600$$

$$\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0,125 \quad \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75 = 0,750 \quad \frac{5}{10} = 5 : 10 = 0,5 = 0,500$$

Сада ћемо упоредити добијене децималне бројеве:

$$0,125 < 0,5 < 0,6 < 0,75.$$

а) Ивана је претрчала највећи део стазе.

б) Марко је претрчао најмањи део стазе.

$$в) \frac{1}{8} < \frac{5}{10} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$$

Задатак 3

Један мајстор може да уради један посао за 8 сати, а други за 5 сати. Колики део посла може да уради сваки од њих за 1 сат? Ко од њих може да уради више посла за 6 сати?

Задатак 4

Поређај бројеве по величини, почевши од најмањег: $\frac{39}{50}$; 0,45 ; $\frac{1}{2}$; 1,67; 0,005; $\frac{18}{25}$; $\frac{4}{3}$.

Зашто је важно да знамо како да упоређујемо и поређујемо разломке у свакодневном животу? Можеш ли да наведеш пример из стварности где би ти то било корисно?

Процени свој рад у свесци, одговарајући на следећа питања:

1. Колико добро разумем шта је разломак и како га упоређујем са другим разломком?
2. Да ли ми је јасно како да поређам разломке?
3. Да ли успевам да применим стратегије за упоређивање разломака у практичним задацима? (напиши укратко)

Користи скалу од 1 до 5, где:

- 1 – Ништа нисам разумео/ла.
- 2 – Разумем нешто, али имам много питања.
- 3 – Разумем део лекције, али нешто ми је нејасно.
- 4 – Добро сам разумем, али треба још да вежбам.
- 5 – Потпуно разумем лекцију и могу да је применим.

Самосталан рад

- Упореди разломке: а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ б) $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{7}$ в) $\frac{4}{9}$ и $\frac{8}{9}$ г) $\frac{12}{17}$ и $\frac{13}{17}$ д) $\frac{36}{47}$ и $\frac{21}{47}$
- Упореди разломке: а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{7}$ б) $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{6}$ в) $\frac{10}{10}$ и $\frac{10}{20}$ г) $\frac{41}{38}$ и $\frac{41}{38}$ д) $\frac{258}{300}$ и $\frac{258}{100}$
- Сведи разломке на најмањи заједнички именитељ: а) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$ б) $\frac{7}{12}$ и $\frac{13}{15}$ в) $\frac{11}{15}$ и $\frac{31}{35}$ г) $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{15}$ и $\frac{1}{20}$ д) $\frac{11}{18}$, $\frac{31}{72}$, $\frac{5}{9}$ и $\frac{29}{36}$
- Поређај разломке по величини, почевши од најмањег, одвојене знаком <:
 а) $\frac{12}{18}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{14}{18}$, $\frac{7}{18}$ и $\frac{10}{18}$
 б) $\frac{13}{15}$, $\frac{13}{9}$, $\frac{13}{28}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{13}{17}$, $\frac{13}{128}$, $\frac{13}{12}$ и $\frac{13}{44}$
 в) $\frac{8}{140}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{31}{35}$, $\frac{58}{60}$ и $\frac{253}{420}$
- Један радник је завршио кров за $\frac{1}{3}$ дана, а сутрадан је направио још један кров за који је потрошио $\frac{3}{8}$ дана. Који кров је радио дуже?
- Молер је фарбао зид 3 дана. Првог дана је завршио $\frac{1}{5}$ зида, другог дана $\frac{4}{11}$ зида и трећег дана $\frac{14}{30}$ зида. Који дан је молер радио најмање, а који највише?
- Један кројач може да искроји део одеће за 5 сати, а други за 7 сати. Који је искројио више материјала ако је први радио 4 сата, а други сат више?
- Три дечака имају исти износ новца. Први дечак је потрошио $\frac{4}{5}$ износа, други $\frac{13}{15}$, а трећи $\frac{17}{21}$. Ко је потрошио највише, а ко најмање новца?
- Један резервоар се пуни из две цеви. Прва цев пуни резервоар за 8 сати, друга за 11 сати. Ако је прва цев отворена 3 сата, а друга 4 сата, која ће напунити већи део резервоара?
- Због штедне воде, Небојша сакупља кишницу у бачвама, свака има капацитет од 1 kl. У првој бачви напунио је 0,34 kl, у другој $\frac{4}{5}$ од бачве, у трећој $\frac{1}{8}$, а у четвртој 0,6 kl. У којој бачви има највише, а у којој најмање кишнице?

Периодични децимални бројеви

У свакодневном животу често се налазимо у ситуацијама када је потребно претворити децимални број у разломак или обратно. На пример, колико центиметара је дугачак комад ограда за двориште ако је у метрима изражен као $4\frac{1}{3}$ m. Када бисмо овај мешовити број претворили у децимални, добили бисмо број који садржи 4 као целобројни део и 3 као децимални део који се стално понавља, па дељење нема крај. За разлику од броја $4\frac{1}{3}$, број $4\frac{1}{3}$, претворен у децимални, износи 4,6, што значи да има коначан број децимала.



У овој лекцији ћеш научити како да запишеш и именујеш децималне бројеве, без обзира на број децималних места које имају, а који се добијају дељењем било које два броја. Стекавши та знања, побољшаћеш своју способност рада са децималним бројевима и лакше ћеш решавати задатке у којима се они користе.

Пример 1

- а) Који број је већи: 3,45 или 3,54?
- б) Који број је мањи: 6,27 или 6,72?
- в) Који број је највећи: 2,85; 2,58 или 2,95?
- г) Поређај бројеве од најмањег до највећег: 4,6; 4,16; 4,61.

Решење:

а) $3,54 > 3,45$

б) $6,27 < 6,72$

в) Највећи је број 2,95

г) $4,16 < 4,6 < 4,61$

Објасни одговор за свако питање.

Задатак 1

Број 18,356248 заокружи:

- а) на једну децималу б) на две децимале в) на четири децимале

Пример 2

У пет кутија налази се различита количина поморанџи: $\frac{3}{8}$ kg, $\frac{7}{9}$ kg, $\frac{40}{27}$ kg, $\frac{7}{12}$ kg.

- а) Запиши сваку количину поморанџи као децимални број.
- б) Објасни шта запажаш.

Решење:

а) $\frac{3}{8} : 8 = 0,375$

$$\begin{array}{r} 30 \\ -24 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -40 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\frac{7}{9} : 9 = 0,77777...$

$$\begin{array}{r} 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 7 \end{array}$$

$\frac{40}{27} : 27 = 1,481481...$

$$\begin{array}{r} 40 \\ -27 \\ \hline 130 \\ -108 \\ \hline 220 \\ -216 \\ \hline 40 \\ -27 \\ \hline 130 \\ -108 \\ \hline 220 \\ -216 \\ \hline 40 \\ -27 \\ \hline 13 \end{array}$$

$\frac{7}{12} : 12 = 0,58333...$

$$\begin{array}{r} 70 \\ -60 \\ \hline 100 \\ -96 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 4 \end{array}$$

Код дељења броја 3 са 8, односно за разломак $\frac{3}{8}$, дељење се завршава – добијени остатак је 0. Добијени број је децималан број који се назива коначан децимални број.

У сваком од осталих разломака, приликом дељења бројиоца и имениоца, дељење се не завршава. Без обзира на то колико нула додали, остатак никада није 0, односно дељење се наставља у недоглед. Такви децимални бројеви имају бесконачно много децимала и називају се бесконачни децимални бројеви.

Бесконачни децимални бројеви као што су $0,77777...$ и $1,481481...$ имају једну цифру (7) или групу цифара (481) које се понављају у истом редоследу одмах након децималне тачке. Такви децимални бројеви се називају чисто периодични децимални бројеви. Низ цифара који се понавља назива се период.

Код бесконачног децималног броја $0,58333...$ који добијамо дељењем 7 са 12, понављање цифре (или групе цифара) не почиње одмах након децималне тачке. Такви децимални бројеви се називају мешано периодични децимални бројеви.

	Чисто периодични децимални бројеви		Мешано периодични децимални бројеви
Број	$0,777...$	$0,481481...$	$0,58333...$
Чита се	0 целих и 7 у периоду	0 целих и 481 у периоду	0 цели, 58 стотинки и 3 во период
Записује се	$0,(7)$	$0,(481)$	$0,58(3)$

У броју $0,58(3)$, група цифара 58 која се налази пре цифре 3 (која чини период) назива се претпериод.

Увођењем децималних бројева (коначних и бесконачних), можемо сваки природни број поделити са сваким другим природним бројем и као резултат добити коначан или периодичан децимални број.

При дељењу два броја може се добити:

1. Коначан децимални број.
2. Бесконачан децимални број, и то:
 - а) чисто периодичан децимални број (када се одмах након децималне тачке понавља једна цифра или група цифара),
 - б) мешано периодичан децимални број (када понављање цифре или групе цифара не почиње одмах након децималне тачке).

Задатак 2

Запиши децималне записе разломака и одреди кој је тип добијеног децималног броја:

- а) $\frac{37}{25}$ б) $\frac{12}{27}$ в) $\frac{625}{135}$ г) $\frac{152}{41}$ д) $\frac{20\,250}{1\,296}$ е) $\frac{19}{9}$

Пример 3

Ана и Марко желе да направе колаче. Према рецепту, потребно им је $\frac{2}{5}$ литра млека, $\frac{3}{4}$ килограма брашна и $\frac{5}{6}$ килограма шећера.

- а) Претвори дате разломке у децималне бројеве.
- б) За сваки добијени децимални број објасни да ли је коначан или бесконачан децимални број.
- в) Ако мерна чаша коју користе има ознаке на сваких 0,1 литар, на колико литара ће заокружити број који показује запремину млека?
- г) Ако вага може да измери масу са прецизношћу до 0,01 kg, на колико килограма ће заокружити брашно и шећер?

Решење:

- а) Разломци записани као децимални бројеви су: $\frac{2}{5} = 0,4$; $\frac{3}{4} = 0,75$ и $\frac{5}{6} = 0,8333\dots$
- б) 0,4 је коначан децимални број јер има коначан број цифара после децималне тачке.
0,75 је коначан децимални број јер има коначан број цифара после децималне тачке.
0,8333... је мешовити периодични децимални број јер се цифра 3 понавља бесконачно пута, а понављање не почиње одмах после децималне тачке.
- в) Пошто мерна чаша од једног литра има ознаке на сваких 0,1 литар, 0,4 литра се може тачно измерити. Дакле, нема потребе за заокруживањем вредности јер се она већ уклапа у ову скалу.
- г) Брашно (0,75 kg) већ има две децимале, па није потребно заокруживање на стотинке, док шећер (0,8333...) треба да се заокружи на две децимале: 0,83 kg. Размисли и објасни зашто у овом случају не заокружујемо на 0,84?

Задатак 3

Марија и Иван су мерили дужине различитих предмета за свој школски пројекат.

Ево њихових мерења у метрима: дужина стола је $\frac{7}{8}$ m, висина столице је $\frac{5}{4}$ m и дужина свеске је $\frac{2}{3}$ m.

- Претвори дате разломке у децималне бројеве.
- Одреди за сваки број да ли је коначан или бесконачан децимални број.
- Ако Марија и Иван користе мерну траку са ознакама на сваких 0,05 m, на коју најближу ознаку ће заокружити сваку дужину?

Ако поделимо 1 са 3, добијамо бесконачан периодичан децималан број (0,3333...). Ако тај резултат помножимо са 3, добијамо 0,9999... Али знамо да је $1 : 3 \cdot 3 = 1$. Како је могуће да се добија и 0,9999... и 1? Шта мислиш, зашто се то дешава?

„Три питања за размишљање“ у твојој свесци:

- Шта сам данас научио/научила о коначним и бесконачним децималним бројевима? (Напиши једну-две реченице.)
- Који задатак ми је био најлакши, а који најтежи? Зашто? (Идентификуј изазове.)
- Како се осећам у вези са овом лекцијом?
(😊 Одлично | 😊 Добро | 😊 Треба да вежбам више.)

Самосталан рад

1. Подели:

- а) $2 : 3$ б) $5 : 9$ в) $2 : 11$ г) $14 : 22$ д) $16 : 27$ ђ) $50 : 37$ е) $8 : 54$ ж) $73 : 41$

Да ли су добијени бројеви чисто периодични или мешано периодични?

Одреди период сваког од броја

2. Претвори разломке у децималне бројеве и за сваки одреди период и претпериод, ако их има.

- а) $\frac{38}{9}$ б) $\frac{13}{15}$ в) $\frac{32}{28}$ г) $\frac{42}{36}$ д) $\frac{118}{123}$ е) $\frac{23}{37}$

3. Дате бројеве заокружи на једну децималу:

- а) 0,147 б) 5,6(3) в) 14,009 г) 1,91556 д) 3,(5) е) 0,901 е) 26,863 ж) 26,98

4. Дате бројеве заокружи на две децимале:

- а) 6,06132 б) 0,009995 в) 153,0(5) г) 12,561999 д) 0,(9) е) 77,(7)
е) 9,0(173) ж) 9,99(8)

Описивање, рачунање и поређење делова целине помоћу разломака и процената

Разломци и проценти су важан део свакодневног живота – користићеш их када рачунаш попусте у продавници, када упоређујеш резултате, анализираш нутритивни састав хране или одређујеш колики део нечега је искоришћен. У овој лекцији ћеш научити како да користиш разломке и проценте да опишеш делове облика, целина и мера.



Истраживаћеш како да израчунаш једноставне проценте од дате целине и како да изразиш део нечега као разломак или проценат. Такође, користићеш проценте да упоређујеш различите количине и да разумеш њихов значај у реалним ситуацијама. Ова знања ће ти помоћи да боље разумеш математичке односе око себе и доносиш боље одлуке у свакодневном животу.

Пример 1

Дате су две различите ситуације у којима треба да користиш разломке, децималне бројеве и проценте:

Ситуација 1: Сprovedена је анкета о омиљеном воћу код 1 100 ученика и добијени су следећи резултати: 12 % ученика је изабрало јабуке, 14 % банане, 15 % поморанце, 110 ученика није изабрало ниједну од ових опција, а остали су изабрали неко друго воће као омиљено.

Ситуација 2: Парк је попловчан са 141 000 плочица. У парку, 1 410 плочица се налази у делу за игралиште.

- Претвори дате проценте 12 %, 14 % и 15 % у разломке.
- Одреди колики проценат од укупног броја (1 100) представља 110 ученика који нису изабрали воће. Запиши резултат као проценат и као разломак.
- Одреди колики део парка је заузет игралиштем, изражен као проценат и као разломак.

Решење:

$$\text{а) } 12\% = \frac{12}{100} = \frac{12 \cdot 4}{100 \cdot 4} = \frac{3}{25}, 14\% = \frac{14}{100} = \frac{14 \cdot 2}{100 \cdot 2} = \frac{7}{50}, 15\% = \frac{15}{100} = \frac{15 \cdot 5}{100 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

б) Део ученика који нису изабрали воће, приказан као разломак, је $\frac{110}{1100}$. Разломак се може скратити ако се и бројилац и именилац поделе са 110, па добијамо $\frac{110 \cdot 110}{1100 \cdot 110} = \frac{1}{10}$. Разломак $\frac{1}{10}$ ако се прошири са 10 да бисмо у имениоцу добили 100, гласи: $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 10\%$. Дакле, 10% ученика није изабрало ниједно од три понуђена воћа у анкети.

в) Упутство: решава се исто као под б).

Задатак 1

Један производ кошта 900 динара. Цена производа је снижена за 15 %. Колико кошта производ након снижења цене?

Пример 2

У дворишту породице Сиљановски постављено је 1000 сијалица за декорацију поводом породичне прославе. 12 % сијалица било је плаво, 24 % зелено и 15 % црвено. Остатак сијалица био је жути.

- а) Колико сијалица је било плаво, зелено и црвено?
- б) Број сијалица у свакој боји запиши као разломак.
- в) Одреди колико сијалица је било жуте боје.

Решење:

- а) 12 % од 1000 сијалица било је плаво. Ако је 1 % од 1000 једнако 10 сијалица, онда је 12 %:
 $12 \cdot 10 = 120$. Значи, 120 сијалица било је плаво.
24 % од 1.000 сијалица било је зелено. То значи да има дупло више зелених него плавих.
Ако је 120 плавих, онда је $2 \cdot 120 = 240$ зелених сијалица.
Слично томе, 15 % од 1000, односно $15 \cdot 10 = 150$ сијалица било је црвено.
Можемо поступити и другачије: Полазећи од тога да је $10\% = \frac{1}{10}$, добијамо да је 10 % од 1000 је $1000 : 10 = 100$, а 5 % је половина од тога, односно 50. Тако за 15 % добијамо $100 + 50 = 150$ црвених сијалица.
- б) 120 од 1000 сијалица је плаво, што као разломак гласи: $\frac{120}{1000}$
240 од 1000 сијалица је зелено, што је $\frac{240}{1000}$ и 150 од 1000 сијалица је црвено, што је $\frac{150}{1000}$.
Сваки од разломака запиши као нескративи разломак:
- в) Прво одредимо укупан број плавих, зелених и црвених сијалица: $120 + 240 + 150 = 510$.
Ако је укупно 1.000 сијалица, онда је број жутих: $1000 - 510 = 490$. То значи да је број жутих сијалица 490.
Запиши број жутих сијалица као разломак и као проценат

Пример 3

У једној продавници продато је $\frac{12}{25}$ метара зелене чоје и 38 % смеђе чоје. Ако су почетне дужине оба типа чоје биле једнаке, од које чоје је продато више?

Решење:

Задатак можеш да решиш на више начина.

I начин: Разломак и проценат запиши као децималне бројеве $\frac{12}{25} = \frac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{48}{100} = 0,48$.
 $38\% = \frac{38}{100} = 0,38$. $0,48 > 0,38$, значи $\frac{12}{25} > 38\%$. Више је потрошено зелене чоје.

II начин: 38 % записујемо као разломак, односно $38\% = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$. Разломци $\frac{12}{25}$ и $\frac{19}{50}$ се свде на заједнички именилац, $\frac{12}{25} = \frac{24}{50}$. Добијамо: $\frac{24}{50} < \frac{19}{50}$. Значи: $\frac{12}{25} < 38\%$, од једнаких почетних дужина.

III начин: Разломак $\frac{12}{25}$ запиши као проценат. Имамо: $\frac{12}{25} = \frac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{48}{100} = 48\%$; $48\% > 38\%$. Значи: $\frac{12}{25} > 38\%$, од једнаких почетних дужина.

Задатак 2

- а) Користећи дијаграм, запиши колико је $\frac{5}{6}$ од 24.
 б) Нацртај дијаграм којим ћеш приказати колико је $\frac{3}{7}$ од 14 јабука.



Пример 4

У једној продавници спортске опреме има укупно 1 200 производа. Продавница има промоцију за следеће категорије производа: 12 % производа су патике, 18 % производа су текстил, 10 % производа су спортске торбе. Остатак производа су додатни спортски додаци.

- а) Израчунај колико производа припада свакој од прве три категорије (патике, текстил и спортске торбе).
 б) Израчунај колико производа су додатни спортски додаци.
 в) Запиши део текстилних производа као разломак и као проценат.
 г) Израчунај колика је разлика између процената спортских додатака и патика.

Решење:

- а) Укупан број производа је 1 200.
 Патике: 1 % од 1200 или $\frac{1}{100}$ од 1200 је 12, значи 12 % је $12 \cdot 12 = 144$.
 Текстил: 1 % од 1200 је 12, значи 18 % је $18 \cdot 12 = 216$.
 Спортске торбе: $10\% = \frac{10}{100}$ од 1 200, па се добија $1\,200 \div 10 = 120$. (или: ако је 1 % од 1 200 једнако 12, онда је 10 % = $10 \cdot 12 = 120$)
- б) Да би нашао број додатних спортских додатака, прво израчунај укупан број производа из горе наведених категорија: $144 + 216 + 120 = 480$ производа.
 Пошто укупно има 1 200 производа, број додатних спортских додатака је: $1\,200 - 480 = 720$ производа.
- в) Текстилних производа има 216. Записано као разломак:
 $\frac{216}{1\,200} = \frac{216 \cdot 4}{1\,200 \cdot 4} = \frac{864}{4\,800} = \frac{18}{600} = \frac{3}{100} = 3\%$
- г) Број додатних спортских додатака је 720. Записано као разломак:
 $\frac{720}{1\,200} = \frac{720 \cdot 12}{1\,200 \cdot 12} = \frac{8\,640}{14\,400} = \frac{60}{100} = 60\%$
 Патике имају 12 %, а додатни спортски додаци 60 %.
 Значи: $60\% - 12\% = 48\%$ је разлика у процентима између додатних производа и патика.

Задатак 3

Један камион укупне носивости 2,4 тоне превозио је песак до градилишта. Први пут је превезао $\frac{5}{8}$ од 2,4 тоне, а други пут 85 % од своје укупне носивости. Када је превезао више песка?

Како можеш да примениш научене стратегије за израчунавање процената и разломака да би проценио и упоредио информације у свакодневном животу?

Наведи конкретан пример у којем би ти ово знање могло помоћи да донесеш бољу одлуку.

Реши (код куће или у школи) следеће задатке у своју свеску за 10 минута:

1. Колико је 23 % од 600?
2. Запиши разломак $\frac{34}{50}$ у облику процента.
3. Запиши разломак $\frac{7}{4}$ као децималан број.
4. $\frac{3}{5}$ ученика једног одељења играло је кошарку, а 15 % тенис.

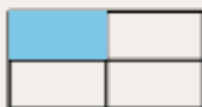
За који спорт је било ангажовано више ученика у том одељењу?

Подели одговоре и стратегију решавања сваког задатка са својим школским другом.

Самосталан рад

1. Разломке запиши као проценте: $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{6}{50}$.
2. Проценте запиши као разломке: 3 %, 11 %, 16 %, 24 %, 30 %, 55 %, 76 %, 80 %, 250 %.
3. Децималне бројеве запиши као проценте: 0,06; 0,13; 0,25; 0,5; 0,77; 0,84; 0,9; 0,95; 1,23; 7,7.
4. Представи обојени део облика као разломак и као проценат:

а)



б)



в)



г)



5. Један радник је примио плату од 20.000 динара. Плата му је повећана за 5%. Колико динара износи повећање и колика је нова плата после повећања?
6. Цена једног пара патика била је 1.000 динара. На крају сезоне, цена патика је смањена за 10%. По којој цени су се патике продавале након снижења?
7. У одељењу VIIa било је 25 ученика. На полугодишту 7 ученика је имало петицу из математике, 9 из матерњег језика и 12 из биологије. Колико процената је било одлично из математике, колико из матерњег језика и колико из биологије?
8. Бензин који је до поноћи коштао 70 динара поскупео је за 4%. Која је нова цена бензина?
9. У једном летњем фудбалском кампу $\frac{4}{25}$ ученика учило је да буде голман, $\frac{6}{13}$ да игра у средини терена и у одбрани, $\frac{12}{40}$ вежбало је за нападаче, док су се остали припремали да буду судије. Изрази разломке у процентима и одреди колико процената ученика је желело да буде судија.

Сабирање разломака

Разломци су веома важан део математике и користимо их у свакодневном животу, на пример, при мерењу састојака за кување, дељењу количина, израчунавању раздаљина. У овој лекцији ћеш научити како правилно да сабираш разломке, чак и када имају различите имениоце. Ово знање ће ти помоћи у даљем изучавању математике, нарочито при раду са процентима, пропорцијама и у теми алгебра.



Пример 1

У школском оркестру једне основне школе $\frac{2}{5}$ ученика је свирало виолину, а $\frac{1}{5}$ ученика виолу. Колики део ученика је свирао ове жичане инструменте?

Решење:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$$

Значи, $\frac{3}{5}$ ученика је свирало неки од та два жичана инструмента.



Задатак 1

У једној продавници пре подне је потрошено $\frac{3}{10}$ од једног ролна штофа, а после подне за $\frac{1}{10}$ више него пре подне. Колики део ролне штофа је продат током целог дана?

Пример 2

Спортски терен једне школе био је подељен на неколико делова. Том приликом, $\frac{1}{2}$ његове површине коришћено је за кошарку, а $\frac{1}{3}$ за тенис. Колики део терена је коришћен за спортске активности – кошарку и тенис?

Решење:

Како да одредимо збир разломака $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$?

Да бисмо сабрали два разломка са различитим именицима, прво их доводимо на заједнички именилац, а то може бити најмањи заједнички садржалац њихових именилаца.

НЗС (2, 3) = 6

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$ и $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$. Сада разломци имају једнаке именице и можемо их сабрати:
 $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Значи, $\frac{5}{6}$ терена је коришћено за кошарку и тенис.

Две дробки са различен именител се сабираат така што прво се доведуваат до ист именител, а потоа се сабираат како дробки са ист именител.

Задатак 2

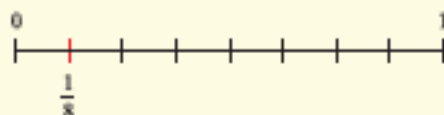
Израчунај: а) $\frac{3}{10} + \frac{2}{9}$ б) $\frac{5}{16} + \frac{3}{3}$ в) $\frac{4}{9} + \frac{3}{11}$

Ако треба да одредимо збир разломака без да га тачно израчунамо, онда кажемо да вршимо процену.

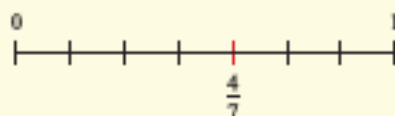
Пример 3

Процени колико је: а) $\frac{4}{7} + \frac{1}{8}$ б) $\frac{1}{8} + \frac{5}{6}$?

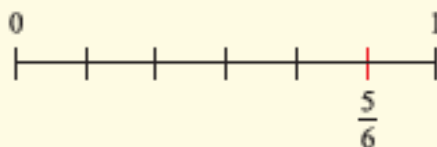
Решење:



На бројевној правој се види да је разломак $\frac{1}{8}$ близу нули, бројилац је мањи од половине имениоца. У том случају, разломак се заокружује на 0.



Са бројне праве се види да је разломак $\frac{4}{7}$ близу $\frac{1}{2}$, односно да је бројилац око половине имениоца. У том случају, разломак се заокружује на $\frac{1}{2}$.



Са бројне праве се види да је разломак $\frac{5}{6}$ близу 1, односно да је бројилац скоро као именилац. У том случају разломак се заокружује на 1.

Користећи горе написано, имамо:

- а) Према цртежима са бројним правима и приближним (процењеним) вредностима добија се да је $\frac{4}{7} + \frac{1}{8}$ разломак око $\frac{1}{2}$.
 б) У овом случају збир $\frac{1}{8} + \frac{5}{6}$ је вредност око 1.

Задатак 3

Процени: а) $\frac{3}{5} + \frac{1}{8}$ б) $\frac{9}{10} + \frac{1}{6}$

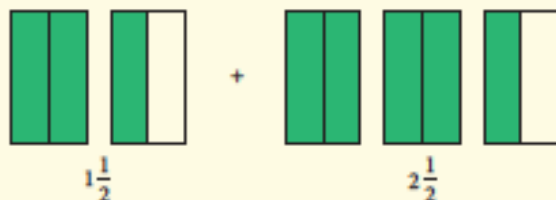
Пример 4

Израчунај $1\frac{1}{2}$ и $2\frac{1}{2}$.

Решење:

Мешовите бројеве можемо сабрати на два начина

I начин: $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} =$ Посебно сабирамо целе делове, а посебно разломке
 $= (1 + 2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 3 + 1 = 4.$



II начин: $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} =$ Мешовите бројеве записујемо као неправилне разломке $= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$

Пример 5

Од једне пита качкавал се продало $5\frac{1}{2}$. Од пите је остало $2\frac{1}{4}$ kg. Колико килограма је била пита качкавал?

Решење:

I начин: $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = (5 + 2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 7 + \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) = 7 + \left(\frac{3}{4}\right) = 7\frac{3}{4}$ kg.

II начин: $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = \frac{11}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$ kg.

Значи, пита качкавал је на почетку имала масу $7\frac{3}{4}$ kg.

Задатак 4

Израчунај: а) $4\frac{2}{5} + 3\frac{1}{15}$ б) $10\frac{2}{7} + 3\frac{1}{8}$ в) $4\frac{5}{14} + 15\frac{8}{21}$

Пример 6

Један бициклиста је први сат прешао 28 km, други сат $2\frac{7}{15}$ km више него први сат, а трећи сат $3\frac{1}{30}$ km више него први сат. Колико километара је бициклиста прешао за три сата?

Први сат прешао је 28 km, други сат $28\text{ km} + 2\frac{7}{15}\text{ km}$, а трећи сат $28\text{ km} + 3\frac{1}{30}\text{ km}$.

Пошто се тражи колико километара је прешао за три сата, добијамо израз:

$$28 + (28 + 2\frac{7}{15}) + (28 + 3\frac{1}{30}) = (28 + 28 + 28 + 2 + 3) + (\frac{7}{15} + \frac{1}{30}) = 89 + (\frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} + \frac{1}{30}) =$$

$$= 89 + (\frac{14}{30} + \frac{1}{30}) = 89 + \frac{15}{30} = 89 + \frac{15 \cdot 15}{30 \cdot 15} = 89 + \frac{1}{2} = 89\frac{1}{2}\text{ km}$$

Значи, бициклиста је за три сата прешао $89\frac{1}{2}\text{ km}$.

Задатак 5

Колика је била дужина једне греде од које су исечена четири комада дужине 2 m, $1\frac{1}{5}$ m, $5\frac{1}{2}$ m и $\frac{5}{6}$ m?

У једној продавници има два типа чоколаде: једна има масу $\frac{3}{4}$ стандардне, а друга $\frac{5}{6}$ стандардне масе. Ако купиш по једну од оба типа, да ли ћеш добити више или мање од стандардне масе једне чоколаде? Како можеш то да израчунаш?

Реши задатке у својој свесци, а затим одговоре и стратегије решавања сваког задатка подели са својим друговима.

1. Израчунај $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$
2. Ана има $\frac{3}{5}$ заједничке уштеде, а Петар има $\frac{2}{7}$ уштеде. Осталих део уштеде припада Дијани. Колики део уштеде имају заједно Петар и Ана?
3. Израчунај $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4}$.
4. Ако имаш $\frac{5}{4}$ чоколаде и још $\frac{1}{3}$ чоколаде, колико укупно чоколаде имаш?

Поређај слова из табеле према редоследу решења задатака да би одредио скривену реч:

$3\frac{11}{12}$	$1\frac{7}{15}$	$1\frac{7}{12}$	$\frac{31}{35}$
И	З	Р	Б

Самосталан рад

1. Збир разломака $\frac{1}{12}$ и $\frac{5}{28}$ повећај за разломак $\frac{1}{14}$.
2. Збир разломака $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$ и $\frac{4}{15}$ повећај за збир разломака $1\frac{1}{16}$ и $\frac{5}{18}$.
3. Један тракторист је првог дана изорао $\frac{4}{15}$ њиве, другог дана $\frac{7}{20}$ и трећег дана $\frac{7}{30}$ њиве. Колики део њиве је изорао тракториста?
4. Колики је збир четири броја ако је први $2\frac{3}{5}$ а сваки наредни за $2\frac{1}{3}$ већи од претходног?
5. Група рудара је у понедељак ископала $123\frac{2}{9}$ t угља, у уторак $151\frac{5}{6}$ t, у среду $128\frac{2}{4}$ t, у четвртак $130\frac{7}{12}$ t и у петак 149 t. Колико тона угља су ископали током пет дана?
6. Један багер ископа једну јаму за 10 сати, а други исту јаму за 15 сати. Одреди:
 - а) Колики део јаме ће заједно ископати оба багера за један сат?
 - б) За колико сати ће оба багера ископати целу јаму?

Одузимање разломака

У претходној лекцији си учио како да сабираш разломке, а у овој лекцији ћеш научити како да их одузимаш. Замисли да имаш целу чоколаду подељену на осмине. Ако поједеш 3 парчета, колико ће ти остати?

Ово је пример одузимања разломака, где почињемо са одређеним бројем делова и одузимамо неке од њих.

Кроз примере из свакодневног живота ћеш разумети зашто је ово знање корисно и како можеш да га примениш у практичним ситуацијама.



Пример 1

На кружном дијаграму је дато како Ајше распоређује време током једног дана. Колики део дана Ајше не спава?

Дневне активности Ајше (24 h)

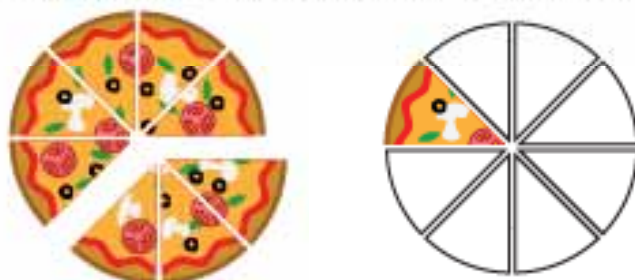


Решење:

Из кружног дијаграма можеш да уочиш да Ајше спава $\frac{3}{8}$ дана, а $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$ не спава. До истог решења доћи ћеш и на други начин. Ако се један дан представи као једна целина, имамо: $1 - \frac{3}{8} = \frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Објасни зашто смо уместо 1 записали $\frac{8}{8}$.

Пример 2

На цртежу су дате пите. Из једне пите је узет означени део. Колики део пите је остао?



Решење:

Према цртежу имамо $1\frac{1}{8}$ пите од које је одузет део који представља $\frac{3}{8}$. Записујемо: $1\frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8} - \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Значи, остало је $\frac{3}{4}$ пите.

Задатак 1

Пронађи разлике:

а) $\frac{19}{23} - \frac{5}{23} - \frac{7}{23}$ б) $\frac{27}{25} - \frac{9}{25} - \frac{3}{25}$ в) $\frac{14}{17} - \frac{1}{17}$

Задатак 2

Израчунај: а) $4 - 1\frac{1}{5}$ б) $3\frac{2}{5} - 1\frac{3}{5}$

Пример 3

За једну позоришну представу се продају карте за $\frac{6}{7}$ седишта у позоришту. Због лошег времена, попунило се само $\frac{4}{5}$ седишта. Колики део седишта за које су биле продате карте је остао празан?

Решење:

Да бисмо одредили колики део седишта за које су биле продате карте у позоришту није био попуњен због лошег времена, потребно је да одредимо разлику између две разломка, односно $\frac{6}{7} - \frac{4}{5}$.

Као и при сабирању разломака са различитим именитељима, тако и при одузимању разломака са различитим именитељима морамо претходно да их сведемо на заједнички именитељ. То може бити, на пример, најмањи заједнички садржалац њихових именитеља, да бисмо радили са мањим бројевима при проширивању разломака: НЗС (7, 5) = 35.

$$\frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{30}{35} - \frac{28}{35} = \frac{2}{35}$$

Значи, због лошег времена, $\frac{2}{35}$ седишта за које су биле продате карте је остало празно.

Две разломке са различитим именицима одузимамо тако што их прво сведемо на исти именилац, а затим их одузимамо као разломке са истим именицем.

Пример 4

Израчунај: а) $3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7}$ б) $4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6}$

Решење:

Разлику разломака можемо да нађемо на два начина.

$$\text{а) I начин: } 3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7} = (3 - 1) + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) = 2 + \left(\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 5}{7 \cdot 5}\right) = 2 + \left(\frac{21}{35} - \frac{5}{35}\right) = 2 + \frac{16}{35} = 2\frac{16}{35}$$

$$\text{II начин: } 3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7} = \frac{18}{5} - \frac{8}{7} = \frac{18 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{8 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{126}{35} - \frac{40}{35} = \frac{86}{35} = 2\frac{16}{35} \quad \text{НЗС (5, 7) = 35}$$

$$\text{б) I начин: } 4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6} = (4 - 1) + \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{6}\right) = 3 + \left(\frac{7}{12} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2}\right) = 3 + \left(\frac{7}{12} - \frac{10}{12}\right) = 2 + 1 + \frac{7}{12} - \frac{10}{12} = 2 + \frac{19}{12} - \frac{10}{12} = 2 + \frac{9}{12} = 2\frac{3}{4}$$

У поступку одузимања добијамо $\frac{7}{12} < \frac{10}{12}$, па зато „узимамо једно цело“ од целог дела, то записујемо као $\frac{12}{12}$ и додајемо разломку $\frac{7}{12}$. Тако добијамо $\frac{19}{12}$.

Погледај поступак поново.

$$\text{II начин: } 4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6} = \frac{55}{12} - \frac{11}{6} = \frac{55}{12} - \frac{11 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{55}{12} - \frac{22}{12} = \frac{33}{12} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \quad (\text{Зашто } \frac{33}{12} = \frac{11}{4}?)$$

Задатак 3

Који број увећан за $\frac{3}{5}$ даје резултат $\frac{2}{3}$?

Задатак 4

Изračунај: а) $4\frac{5}{6} - 3\frac{1}{3}$ б) $3\frac{4}{9} - 2\frac{5}{6}$ в) $5\frac{3}{8} - 1\frac{5}{12} - 2\frac{3}{4}$

Пример 5

Ана је имала $4\frac{2}{3}$ килограма брашна. За припрему колача употребила је $2\frac{5}{6}$ килограма брашна. Колико јој је брашна остало?

Решење:

$$4\frac{2}{3} - 2\frac{5}{6} = \frac{22}{3} - \frac{17}{6} = \frac{22 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{17 \cdot 1}{6 \cdot 1} = \frac{44}{6} - \frac{17}{6} = \frac{44-17}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ kg}$$

Ана је остало $4\frac{1}{2}$ kg брашна.

Задатак 5

Мартин пешачи $5\frac{3}{4}$ километара свако јутро. Једног јутра је пешачио неко време и стао након што је прешао $2\frac{2}{3}$ километара. Колико километара му је остало од километраже коју иначе пређе свако јутро?

Зашто је важно да знамо како се одузимају разломци са различитим именицима у свакодневном животу? Да ли можеш да даш пример из стварног живота када би ти ово знање било корисно?

◊ Размисли о свом знању и одговори у своју свеску са:

☒ , ? или X

☒ — Потпуно разумем и могу самостално да решавам задатке.

? — Разумем делимично, али ми треба мало више вежбе.

X — Још увек нисам сигуран/на и треба ми додатна помоћ.

1. Могу да одузимам разломке са истим именицима.
 2. Могу да нађем заједнички именилац за разломке са различитим именицима.
 3. Могу правилно да одузимам разломке са различитим именицима.
 4. Могу да одузимам мешовите бројеве.
- Могу да применим одузимање разломака у стварним ситуацијама.

Самосталан рад

1. Израчунај: а) $2 - \frac{4}{7}$ б) $3\frac{1}{2} - 2$ в) $3 - 1\frac{7}{12}$ г) $5\frac{7}{9} - 5$
2. Израчунај: а) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ б) $\frac{8}{9} - \frac{7}{12}$ в) $\frac{1}{10} - \frac{1}{15}$ г) $\frac{27}{40} - \frac{7}{18} - \frac{5}{24}$ д) $\frac{3}{2} - (\frac{5}{6} - \frac{2}{3})$
3. За који број треба увећати разлику бројева $4\frac{5}{8}$ и $2\frac{3}{4}$ да би се добио број $7\frac{5}{9}$?
4. За који број треба умањити збир бројева $11\frac{7}{8}$ и $13\frac{5}{12}$ да би се добио број 19?
5. Један земљорадник је првог дана ископао $\frac{2}{5}$ њиве, а другог дана $\frac{1}{4}$. Који део њиве му је остао да ископа?
6. Један базен се пуни водом из две цеви, а празни се трећом. Прва цев пуни за 8 сати, Друга за 12 сати, Трећа празни за 6 сати.**
 - а) Који део базена се напуни за један сат ако раде прве две цеви?
 - б) За колико сати ће се напунити базен ако раде само прве две цеви?
 - в) Који део базена ће бити пун за један сат ако прве две цеви пуне, а трећа празни?
7. Пешак је прешао 28 km за 6 сати, а бициклиста 33 km за 3 сата. Колико више километара по сату пређе бициклиста него пешак?

Множење разломака

У овој лекцији ћеш научити како се множе разломци.

Разломци ти помажу да прикажеш делове целине, а множење разломака ти показује како да израчунаш део од дела или да комбинујеш делове.

Почећеш са разумевањем основних правила за множење разломака и видећеш како можеш да поједноставиш резултате. Истражићеш примере из свакодневног живота, као што су дељење пице или мерење састојака при кувању, да би лакше разумео зашто је ова рачуница важна.



Пример 1

Зборови једнаких сабирака могу се записати скраћено:

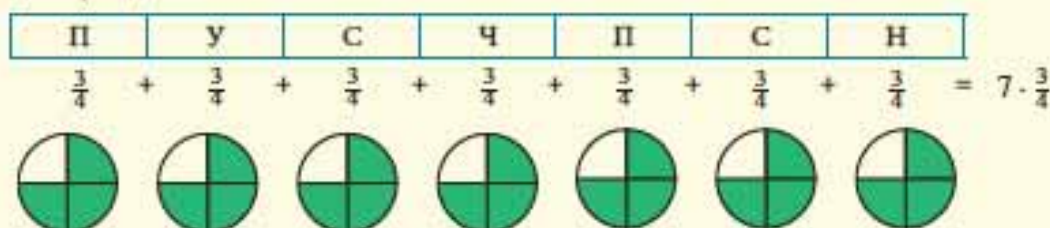
$$7 + 7 = 2 \cdot 7 \quad 7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7 \quad \frac{7 + 7 + 7 \dots + 7}{n \text{ - собирани}} = n \cdot 7$$

Пример 2

Симона је тренирала тенис по $\frac{3}{4}$ сата сваког дана. Колико је укупно сати тренирала тенис недељно?

Решење:

Дани у недељи:



Имамо: $7 \cdot 3$ четвртине је 21 четвртину. Записујемо $7 \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.
Дакле, Симона је током једне недеље тренирала тенис $5\frac{1}{4}$ сати.

Разломак $\frac{a}{b}$ се множи природним бројем n тако што се бројилац разломка множи са n , а именилац се преписује, односно:

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}.$$

Задатак 1

У четири флаше било је по $\frac{7}{8}$ литара сока. Колико је укупно литара сока било?

Када множиш природан број са разломком, треба да пазиш да не изоставиш тачку као знак множења, јер производ природног броја и разломка без означеног множења изгледа као мешовити број.

Ако природан број n и именилац b имају заједнички делилац, можеш их скратити пре множења и рачунање ће бити лакше са мањим бројевима.

Пример 3

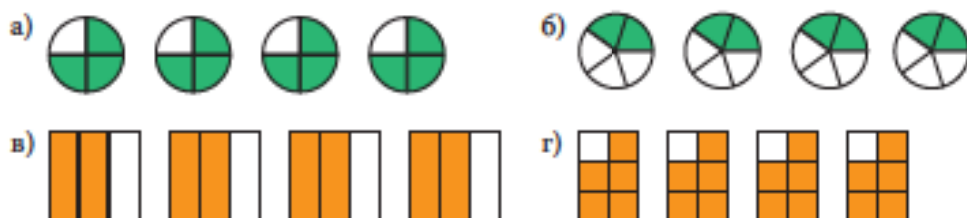
Израчунај производ: $6 \cdot 1\frac{5}{9}$.

Решење:

$$6 \cdot 1\frac{5}{9} = \text{Мешовити број запишемо као неправи разломак: } = 6 \cdot \frac{14}{9} = \frac{6 \cdot 14}{9} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

Задатак 2

Запиши за сваку слику као у примеру под а).



Пример 4

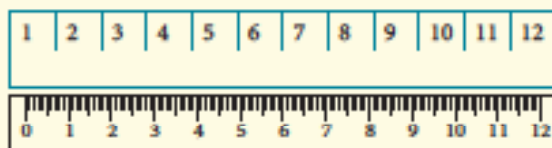
Марко има 12 година, а Сара има $\frac{3}{4}$ Маркових година. Колико година има Сара?

Решење:

Да бисмо нашли $\frac{3}{4}$ од 12, можемо да урадимо следеће кораке:

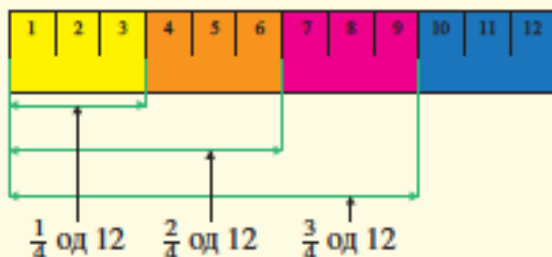
I корак:

Узимамо траку дужине 12 cm. Делимо је на делове од по 1 cm као на цртежу.



II корак:

Траку делимо на 4 једнака дела и сваки део обојимо различитом бојом, као на цртежу.



III корак:

Користећи траку, попуњавамо квадратиће:

$$\frac{1}{4} \text{ од } 12 = 3, \quad \frac{2}{4} \text{ од } 12 = 6, \quad \frac{3}{4} \text{ од } 12 = 9$$

IV корак:

$$\frac{1}{4} \cdot 12 = 3 \quad \frac{2}{4} \cdot 12 = 6 \quad \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$$

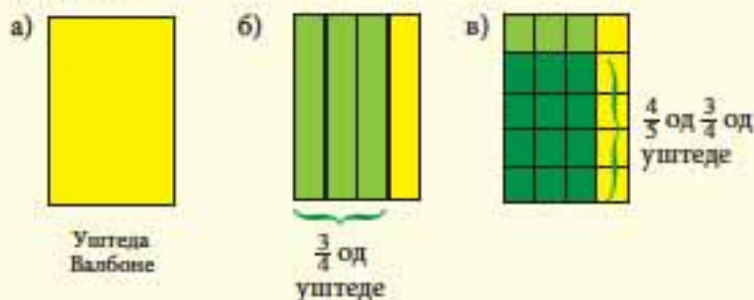
Део $\frac{a}{b}$ од броја x је производ $\frac{a}{b} \cdot x$.

Пример 5

Валбона је отишла на пијаци и понела са собом $\frac{3}{4}$ своје уштеђевине. $\frac{4}{5}$ новца који је понела потрошила је на сувенире. Који део уштеђевине је Валбона потрошила на сувенире?

Решење:

Валбона је потрошила $\frac{4}{5}$ од $\frac{3}{4}$ од уштеде. Са цртежима је приказано решавање проблема.



Према цртежу под в) $\frac{4}{5}$ од $\frac{3}{4}$ од уштеде коју је Валбона потрошила је представљено са $4 \cdot 3$ од укупно $5 \cdot 4$ малих правоугаоника, или 12 од укупно 20 правоугаоника.

Записујемо: $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

Според примерот,

Производ две разломке је разломак чији је бројилац производ бројилаца множитеља, а именилац производ именилаца множитеља.

Пример 6

За рођенданску журку коју је организовао Мите купљено је $5\frac{2}{3}$ литара сока. Од њих је потрошено $\frac{2}{3}$. Колико литара је потрошено?

Решење:

$\frac{2}{3}$ од $5\frac{2}{3}$ литара је $\frac{2}{3} \cdot 5\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{17}{3} = \frac{2 \cdot 17}{3 \cdot 3} = \frac{34}{9} = 3\frac{7}{9}$

Дакле, за рођенданску журку је потрошено $3\frac{7}{9}$ литара. Да би се извршило множење, претходно мешани број се претвара у неправилан разломак.

Како би могао да примениш вештину множења разломка са мешаним бројем у стварном животу, на пример, при дељењу хране, материјала или при планирању активности? Објасни са конкретним примером.

1. Да ли сам разумео шта је разломак и како се множи разломак са природним бројем? Да/Не
2. Да ли могу да претворим мешовити број у неправиан разломак и обратно? Да/Не
3. Да ли сам успео да решим задатке са множењем разломака и мешовитих бројева? Да/Не
4. Да ли могу да применим правила множења разломака у стварним ситуацијама (на пример, при дељењу хране, материјала и слично)? Да/Не

Ако си одговорио са „Да“ на већину питања, то значи да си добро разумео лекцију.

Ако си одговорио са „Не“ на нека питања, то значи да треба да поновиш те делове како би побољшао разумевање.

Запиши шта ти је било најтеже у овој лекцији и на чему би желео више да радиш.

Самосталан рад

1. Израчунај: а) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}$ б) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{15}$ в) $\frac{3}{10} \cdot 1\frac{1}{9}$ г) $3\frac{1}{8} \cdot 1\frac{4}{15}$
2. Од 36 ученика, $\frac{2}{9}$ су девојчице. Колико је девојчица, а колико дечака?
3. Покажи да је производ разломака $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ једнак њиховој разлици.
4. Израчунај површину правоугаоника чије су странице $44\frac{1}{3}$ cm и $3\frac{1}{3}$ cm.
5. Шта је веће:
а) $\frac{3}{5}$ од 150 или $\frac{5}{9}$ од 180?
б) $\frac{3}{4}$ од $2\frac{2}{9}$ или $\frac{4}{5}$ од $3\frac{3}{4}$?
6. Израчунај:
а) $\frac{3}{5} \cdot (\frac{2}{3} + \frac{3}{4})$ б) $(1\frac{3}{8} + 2\frac{1}{6}) \cdot 1\frac{3}{5}$ в) $(4 - 2\frac{5}{6}) \cdot 2\frac{2}{3}$ г) $1\frac{3}{4} \cdot (1\frac{1}{7} - \frac{3}{14})$
7. Петар је вежбао тако што је прво трчао $\frac{4}{9}$ круга, а затим је возио бицикл $\frac{2}{3}$ круга. Од укупне дужине коју је прешао, $\frac{2}{3}$ дела је прешао у хладу.
а) Колико је укупно кругова прешао?
б) Колики део круга је прешао у хладу?

Дељење разломака

У овој лекцији ћемо се фокусирати на дељење разломака, што ће ти помоћи да примениш концепт дељења у практичним ситуацијама. Замисли да имаш 3 јабуке и да су оне исечене на половине. Колико људи ће добити по половину јабуке? Да би одговорио на ово питање, заправо треба да израчунаш количник: $3 : \frac{1}{2}$. Ово је само један пример како примењујемо дељење разломака у свакодневном животу. У овој лекцији вежбаћеш на конкретним примерима, што ће ти помоћи да побољшаш своје вештине дељења.



$$3 : \frac{1}{2} = 6$$

Пример 1

Весна је имала $\frac{4}{5}$ торте. Појела је $\frac{1}{3}$ свог дела торте. Колики део торте је појела? Прикажи свој одговор и дијаграмом.

Задатак 1

- Колико група од по 2 поморанџе можеш направити од 6 поморанџи? Запиши решење одговарајућом математичком операцијом.
- Колико четвртина има у једној половини? Коју математичку операцију можеш употребити да прикажеш решење?

Пример 2

Пресметај: а) $3 \cdot \frac{1}{3}$ б) $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2}$ в) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}$

Решење:

$$\text{а) } 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{б) } \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 2} = \frac{14}{14} = 1 \quad \text{в) } 2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{21}{21} = 1$$

У овом примеру је очигледно да је бројилац првог разломка једнак имениоцу другог разломка, и именилац првог разломка једнак бројоцу другог.

Производ таквих разломака је 1.

Реципрочни разломци су два разломка чији је производ једнак 1.

Задатак 2

Запиши реципрочне разломке од: $\frac{11}{13}$, $\frac{9}{10}$, 5, $4\frac{3}{5}$, $\frac{21}{25}$.

Пример 3

Наталија и Петар требало је да поделе $\frac{4}{5}$ чоколаде.

Наталија је поступила овако: 4 петине поделила је са 2 и сваки је добио 2 петине.

Записала је: $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{2}{5}$

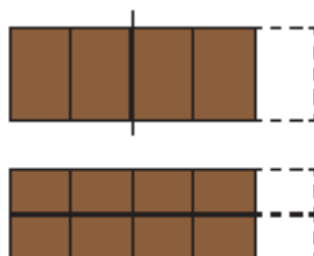
Петар је поступио овако: сваку петину је поделио на два једнака дела и од сваке петине добио је по две десетине. Значи, сваки је добио по 4 десетине.

Записао је: $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Наталија и Петар су, у оба случаја, добили исте делове чоколаде.

Значи, разломак може да се подели природним бројем на два начина: бројилац се дели тим бројем или именилац се множи тим бројем, односно:

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a \cdot n}{b} \text{ или } \frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}.$$



Пример 4

Пресметај $\frac{2}{7} : 3$.

Решење:

I начин: $\frac{2}{7} : 3 = \frac{2 \cdot 3}{7}$

II начин: $\frac{2}{7} : 3 = \frac{2}{7 \cdot 3} = \frac{2}{21}$

Пошто у првом начину бројилац није дељив природним бројем, практичније је да се разломак дели на други начин, тј. да се множи са реципрочним бројем. Зато се може рећи да овај други поступак има ширу примену.

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n}, \text{ где је } \frac{1}{n} \text{ реципрчни разломак од } n.$$

Разломак се дели природним бројем тако што се разломак множи реципрочном вредношћу тог природног броја.

Пример 5

Илир је требало да израчуна:

а) $\frac{4}{9} : \frac{2}{3}$ б) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$

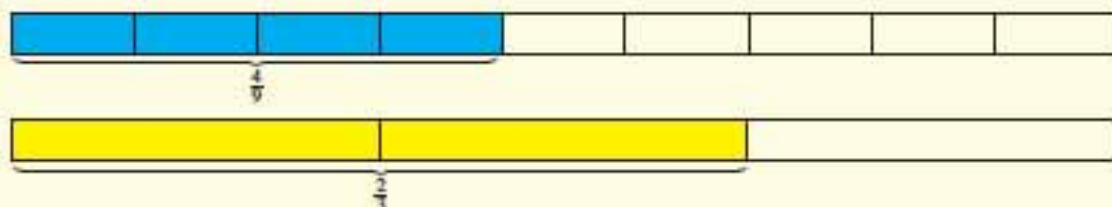
Решење:

- а) Илир је знао како се множе два разломка и да је дељење обрнута операција од множења, па је израчунао на следећи начин: $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{2}{3}$. Да би био сигуран у тачност поступка, направио је проверу: $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$.

Покушао је и са дијаграмима. Према операцији коју треба да изврши, тражио је одговор на питање: „Колико пута $\frac{2}{3}$ стане у $\frac{4}{9}$?” Одговор на то питање добио је када је одредио колики део обојен жутом бојом потпуно покрива део обојен плавом бојом. Тако је добио део обојен зеленом бојом, који представља $\frac{12}{18}$. Потом је скратио добијени разломак и добио: $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 6}{18 \cdot 6} = \frac{2}{3}$, што значи исти резултат као и у првом случају.

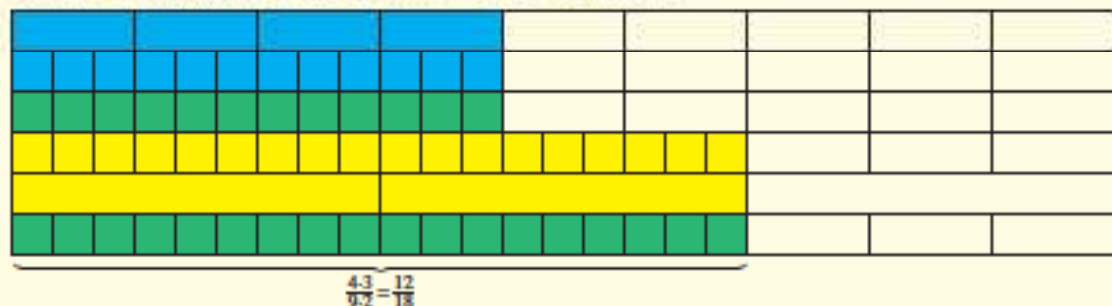
Објасни како је Илиров дијаграм повезан са записом дељења два разломка:

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 6}{18 \cdot 6} = \frac{2}{3}.$$



Свака од четири деветине дели се на трећине: $4 \cdot 3 \text{ дела} = 12 \text{ делова}$.

Има 9 таквих делова у две трећине: $9 \cdot 2 = 18 \text{ делова}$.



Из дијаграма је приметио да се то може записати као разломак деленик је помножен са реципрочним разломком од делитеља.

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 6}{18 \cdot 6} = \frac{2}{3}$$

множење са реципрочна дробка на $\frac{2}{3}$

- б) Илир је покушао да користи исти начин као под а), односно записао је: $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$, али је дошао у ситуацију када се дељењем не добија цео број ни у бројиоцу ни у имениоцу, па је зато израчунао на други начин: $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$. Поново се може закључити да је при дељењу разломка разломком практичније да се деленик помножи са реципрочним разломком делитеља.

Разломак се дели разломком тако што се делилац помножи реципрочним разломком делитеља, односно, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$

Задатак 3

Израчунај: а) $1\frac{1}{6} : 3$ б) $\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$ в) $\frac{5}{16} : 4\frac{3}{8}$ г) $\frac{7}{12} : \frac{3}{5}$

Пример 6

Кирина мама је за $3\frac{1}{4}$ kg брашна потрошила 260 динара. Колико кошта 1 kg брашна?

Решење:

Потрошени новац делимо количином купљеног брашна. Имамо:

$$260 : 3\frac{1}{4} = 260 : \frac{13}{4} = \frac{260}{1} : \frac{13}{4} = \frac{260}{1} \cdot \frac{4}{13} = \frac{260 \cdot 4}{1 \cdot 13} = \left\{ \frac{260 \cdot 13}{13 \cdot 13} = \frac{20}{1} \right\} \cdot 4 = \frac{20 \cdot 4}{1 \cdot 1} = \frac{80}{1} = 80$$

260 и 13 можат да се скратат са 13

Значи, 1 kg брашна кошта 80 денара.

Задатак 4

Бојан има летве дужине $\frac{2}{7}$ m. Жели да направи кућицу на дрвету са прозором дужине $\frac{4}{5}$ m. Колико парчића летви дужине $\frac{2}{7}$ m ће бити у укупној дужини од $\frac{4}{5}$ m?

Ако знаш како се множе и деле цели бројеви, зашто код дељења разломака користимо множење? Објасни своје размишљање примером.

1. Да ли разумем правило за дељење разломака?
 - Да, знам да треба да помножим делилац са реципрочним разломком делитеља.
 - Делимично, треба ми још вежбе.
 - Не, још увек ми није јасно и треба ми додатно објашњење.
2. Могу ли самостално да решим задатак са дељењем разломака?
 - Да, могу без грешке.
 - Могу, али понекад грешим.
 - Тешко ми је и не знам како да почнем.
3. Могу ли да објасним зашто при дељењу разломака користимо множење?
 - Да, могу да објасним својим речима.
 - Делимично, разумем, али не знам како да објасним.
 - Не, још увек ми није јасно.

4. Како се осећам у вези са данашњим часом?

- Сигуран/на сам у своје знање.
- Треба ми још мало вежбе.
- Ово ми је било тешко, потребна ми је помоћ.

Ако имаш више првих понуђених одговора, значи да си савладао лекцију.

Ако већина твојих одговора припада другој опцији, потребно ти је још мало вежбе.

Ако имаш више одговора трећег типа, потребна ти је додатна подршка и објашњење.

Самосталан рад

1. Израчунај:

а) $\frac{4}{5} : 2$ б) $\frac{3}{4} : 3$ в) $\frac{4}{9} : 6$ г) $3\frac{3}{8} : 9$ д) $5\frac{4}{7} : 9$

2. Израчунај количник:

а) $\frac{12}{25} : \frac{4}{5}$ б) $\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$ в) $2 : \frac{1}{4}$ г) $1\frac{11}{12} : \frac{9}{14}$ д) $\frac{5}{16} : 4\frac{3}{8}$ е) $6\frac{8}{9} : 4\frac{1}{12}$

3. Израчунај:

а) $(1 - \frac{3}{4}) : \frac{5}{16}$ б) $(2\frac{7}{12} - 1\frac{1}{2}) : 2\frac{3}{11}$ в) $\frac{9}{14} : (1\frac{2}{7} + 1\frac{1}{3})$

4. За $3\frac{3}{4}$ kg јабука плаћено је 300 динара. Колико динара кошта 1 килограм јабука?

5. Једно паковање шећера садржи $\frac{1}{8}$ kg шећера. Колико таквих паковања може да се добије од $31\frac{1}{4}$ kg шећера?

6. Колико хлебова може да се направи од 180 kg брашна, ако је за један хлеб потребно $\frac{3}{4}$ kg брашна?

Сабирање и одузимање децималних бројева са различитим бројем децимала

До сада си научио како да сабираш и одузимаш децималне бројеве са истим бројем децимала. Поређивао си бројеве један испод другог према децималном зарезу и рачунао их као природне бројеве.

Али, шта се дешава када бројеви имају различит број децимала?

На пример, како би израчунао: $12,5 + 3,27$? Да ли можеш одмах да их сабереш или прво треба нешто да урадиш?

У овој лекцији ћеш научити како да изједначиш број децимала додавањем нула, како би правилно одредио збир или разлику децималних бројева.



Пример 1

Лана штеди новац за нову књигу. Прве недеље уштедела је 3,25 €, а друге још 4,50 €.

- Колико укупно новца је уштедела после две недеље?
- Потом је Лана одлучила да купи прибор за цртање који кошта 5,75 €. Колико новца јој је остало након куповине?

Решење:

$$\text{а) } 3,25 + 4,50 = 3\frac{25}{100} + 4\frac{50}{100} = (3 + 4) + \left(\frac{25}{100} + \frac{50}{100}\right) = 7 + \frac{75}{100} = 7,75.$$

Можеш ли да решиш на други начин?

Лана је укупно уштедела 7,75 €.

- Затим је Лана одлучила да купи прибор за цртање који кошта 5,75 €

$$7,75 - 5,75 = 7\frac{75}{100} - 5\frac{75}{100} = (7 - 5) + \left(\frac{75}{100} - \frac{75}{100}\right) = 2 + 0 = 2,00$$

Лани је остало 2,00 € након куповине.

Пример 2

Једно пољопривредно газдинство има: $176,32 \text{ hm}^2$ њива, $7,3 \text{ hm}^2$ ливада, $26,362 \text{ hm}^2$ винограда и 19 hm^2 воћњака. Колика је укупна површина коју поседује газдинство?

Решење:

Да би израчунао укупну површину, треба сабрати све површине:

$$\begin{aligned} \text{I начин: } 176,32 + 7,3 + 26,362 + 19 &= 176\frac{32}{100} + 7\frac{3}{10} + 26\frac{362}{1000} + 19 = \\ &= (176 + 7 + 26 + 19) + \left(\frac{32}{100} + \frac{3}{10} + \frac{362}{1000}\right) = \end{aligned}$$

ПУ другој загради сабираш разломке са различитим именитељем. НЗС ($10, 100, 1000$) = 1000

$$= 228 + \left(\frac{32 \cdot 10}{100 \cdot 10} + \frac{3 \cdot 100}{10 \cdot 100} + \frac{362}{1000} \right) = 228 + \left(\frac{320}{1000} + \frac{300}{1000} + \frac{362}{1000} \right) =$$

$$= 228 + \frac{982}{1000} = 228 \frac{982}{1000} = 228,982$$

Значи, пољопривредно добро има $228,982 \text{ hm}^2$.

II начин: Као и код природних бројева, и овде при записивању треба водити рачуна о позицији цифара у бројевима. Стотинке се записују испод стотинки, десетинке испод десетинки, јединице испод јединица, десетице испод десетица итд.

У другом начину ћемо користити прво својство децималних бројева како не бисмо направили грешку при записивању децималних бројева вертикално, један испод другог. Затим сабирамо као природне бројеве. Само пази да запишеш зарез када завршиш са сабирањем децималног дела бројева:

$$\begin{array}{r} 176,320 \\ 7,300 \\ 26,362 \\ \hline 19,000 \\ \hline 228,982 \end{array}$$

Пример 3

Израчунај разлику децималних бројева $27,63$ и $3,796$.

Решење:

I начин:

$$27,63 - 3,796 = 27 \frac{63}{100} - 3 \frac{796}{1000} = (27 - 3) + \left(\frac{63}{100} - \frac{796}{1000} \right)$$

$$= 24 + \left(\frac{63 \cdot 10}{100 \cdot 10} - \frac{796}{1000} \right) = 24 + \left(\frac{630}{1000} - \frac{796}{1000} \right) = \boxed{796 > 630}$$

Зашто разломак
умањеник има
бројилац 1630?

$$= 23 + \left(\frac{1630}{1000} - \frac{796}{1000} \right) = 23 + \frac{834}{1000} = 23 \frac{834}{1000} = 23,834$$

II начин: Одузимаш као природне бројеве. Води рачуна о зарезу.

Пример 4

Ана је отишла у продавницу и купила: 1 l сока за 82,5 динара, 300 g чоколадних колачића за 135 динара, 250 g сира за 97,75 динара. Ана је у новчанику имала 500 динара.

а) Колико денара је укупно потрошила Ана?

б) Колико јој је остало након куповине?

Касније је одлучила да купи и свеску која кошта 185,5 денара.

в) Да ли ће јој остати више од 50 денара након те куповине?

Решење:

а) Укупна сума за купљене производе је:

$$82,5 + 135 + 97,75 = 82,50 + 135,00 + 97,75 \\ = 217,50 + 97,75 = 315,25.$$

Ана је потрошила 315,25 динара за прву куповину.

б) Пари које су јој остале: $500 - 315,25 = 500,00 - 315,25 = 184,75$.

Ани је остало 184,75 динара.

в) Свеска је коштала $185,50 > 184,75$. Значи, Ана није имала довољно новца да купи свеску. Не, Ани неће остати више од 50 динара, јер нема довољно новца ни да купи свеску.

Можеш да сабираш и хоризонтално. Приликом сабирања, води рачуна о позицији цифара у бројевима које сабираш.

Задатак 1

Који број је за 723,864 већи од збира бројева 27,8 и 1364,03?

Задатак 2

За колико је збир бројева 37,9 и 3,79 већи од њихове разлике?

Задатак 3

Абдураман је уштедео новац за своје путовање. Купио је карту за аутобус за 175,50 динара, сувенир за 120,75 динара и доручак за 75,20 динара.

- Колико је динара Абдураман потрошио за све ове ствари?
- Понео је са собом 600 динара. Колико му је новца остало након куповине?
- Потом је одлучио да купи и књигу која кошта 210,60 динара. Да ли ће му остати довољно новца након куповине књиге?

Имаш 1.000 динара и треба да купиш: књигу за 245,60 динара, капу за 385,45 динара и оброк за 132,75 динара.

Како ћеш распоредити новац и да ли ће ти остати пара за нешто друго? Објасни свој приступ и како ћеш израчунати трошкове.

Реши следеће задатке у свесци:

1. $6,73 + 0,8$ 2. $16,37 - 7,8$ 3. $13 - (7,8 + 0,95)$

Заврши кратком рефлексијом: Шта сам данас научио/научила? Шта треба да поновим?

Самосталан рад

1. Израчунај:

- а) $0,32 + 1,08$ б) $0,064 + 1,32 + 2,4$ в) $12,056 + 0,8 + 3,25$
г) $357 - 1,02$ д) $1,3 - 0,75$ е) $2 - 0,375$

2. Израчунај:

- а) $7,56 - (3,2 + 1,08)$ б) $15 - (14,3 - 7,28)$
в) $(1,567 - 0,32) + (2,3 - 0,54)$ г) $(5,61 - 1,8) - (0,005 + 1,7)$

3. Дијаметар Земље који спаја полове је $12\,713,824$ km, а дијаметар екватора је дужи за $42,96$ km. Колики је дијаметар екватора?

4. Тело које слободно пада (са неке висине ка површини Земље) у првој секунди пређе $4,905$ m, а сваке наредне секунде по $9,81$ m више. Одреди колико пута ће тело прећи за:
а) 2 секунде б) 3 секунде в) 5 секунди

5. Израчунај на два начина:

- а) $2,75 + \frac{3}{5} + 13,5$ б) $7,2 + \frac{7}{25}$ в) $7,25 + 1\frac{3}{4} + 3,2$
г) $17,6 - 3\frac{21}{40} - 5,725$ д) $12\frac{3}{5} - 7,32 + 3\frac{3}{4}$

6. У једном магацину за грађевински материјал има $73,56$ t цемента. Првог дана је продато $25,745$ t, другог дана $31,63$ t, а трећег дана је допремљено $17,4$ t, али је продато 23 t. Одреди колико цемента је остало у магацину.

7. Од ролне платна дужине 34 m одсечени су делови дужине: $3,7$ m, $7,25$ m, $0,83$ m, 5 m и $13,72$ m. Колико метара платна је остало?

8. Једна мокра цигла има масу од $4,5$ kg. После сушења изгуби $0,8$ kg, а после печења изгуби $0,6$ kg мање него после сушења. Колика је маса цигле након печења?

9. Виктор, Марина и Исмет заједно имају масу од $184,7$ kg. Виктор и Марина заједно имају $116,5$ kg, а Марина и Исмет $114,8$ kg. Колика је маса сваког од њих појединачно?

10. Представи у табеларном облику скупове:

- $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ и } 0,5 < x < 6,5\}$, $B = \{x | 4,82 < x < 4,91 \text{ и } x \text{ има две децимале}\}$ и
 $C = \{x | x < 2,5 < x + 1 \text{ и } x \in \mathbb{N}\}$

Множење и дељење децималних бројева

Децималне бројеве користиш у свакодневном животу, посебно при мерењима, прорачунима са новцем, брзином, тежином и у многим другим ситуацијама. Да би могао тачно да извршаваш математичке операције са њима, потребно је да разумеш како се правилно множе и деле децимални бројеви.

До сада си се већ упознао са основним прорачунима са децималним бројевима, али нови изазов ће бити множење децималних бројева који имају различит број децималних места.

Научићеш како да прилагодиш бројеве ради лакшег и прецизнијег рачунања.

Савладавањем ових операција, моћи ћеш успешно да примењујеш децималне бројеве у свакодневним ситуацијама и да рачунаш тачно и прецизно.



Пример 1

Периметар једног квадрата износи 18,8 cm.

- Израчунај дужину стране квадрата.
- Израчунај периметар једнакокраког троугла чија је крак 5,4 cm, ако је основица једнака дужини стране квадрата.
- Израчунај периметар правоугаоника чија је дужина једнака краку троугла, а ширина једнака страни квадрата.

Решење:

- Периметар квадрата $L = 4 \cdot a$. Ако убацимо у формулу, добијамо $18,8 = 4 \cdot a$. Да бисмо израчунали страну, треба да поделимо периметар са 4. Израчунај страну квадрата користећи претходно знање о дељењу децималног броја са једном децималом са природним бројем.
- Периметар троугла $L = 5,4 \cdot 2 + 4,7 = 10,8 + 4,7 = 15,5$ cm
- Периметар правоугаоника $L = 5,4 \cdot 2 + 4,7 \cdot 2 = 10,8 + 9,4 = 20,2$ cm

Задатак 1

На број 328,4 додај стоти део броја 61 267.

Пример 2

Производ бројева 3,26 и 1,8 умањи за 1,3.

Решење:

Искористивши знање о множењу природних бројева, односно број 3,26 увећавамо 100 пута, а 1,8 увећавамо 10 пута и добијамо: $(3,26 \cdot 100) \cdot (1,8 \cdot 10) = 326 \cdot 18 = 5868$

Производ 5868 је 1000 пута већи од производа бројева 3,26 и 1,8. Зашто 1000 пута?

Зато што производ 5868 умањујемо 1000 пута, односно $5868 : 1000 = 5,868$ је производ бројева 3,26 и 1,8.

Колико децималних места има број 5,868, тј. производ бројева 3,26 и 1,8?

Остаје да умањим производ 5,868 за 1,3, односно да израчунаш разлику $5,868 - 1,3$.

Два децимална броја множимо на следећи начин: занемаримо зарез у децималним бројевима и множимо добијене природне бројеве, а затим у резултату одвојимо сдесна налево онолико децималних места колико заједно имају дати децимални бројеви.

Пример 3

Израчунај: а) $5,46 : 2,5$ б) $6,4 : 10,24$

Решење:

а) Да бисмо делили два децимална броја, искористићемо претходно знање о дељењу децималног броја са природним бројем. Зато ћемо дељење децималних бројева свести на дељење децималног броја са природним бројем.

Да бисмо делилац претворили у природан број, и делилац и деленик (5,46 и 2,5) множимо са 10. Децимални зарез се у оба броја помера за једно место удесно и задатак се своди на дељење децималног броја са природним бројем. Добијамо:

$$5,46 : 2,5 = (5,46 \cdot 10) : (2,5 \cdot 10) = 54,6 : 25$$

$$54,6 : 25 = 2,184$$

$$\begin{array}{r} -50 \\ 46 \\ -25 \\ \hline 210 \\ -200 \\ \hline 100 \\ -100 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$8 : 2 = 4$$

$$(8 \cdot 4) : (2 \cdot 4) = 32 : 8 = 4$$

Покушај и са другим сличним примерима – шта можеш да закључиш?

$$б) 6,4 : 10,24 = (6,4 \cdot 100) : (10,24 \cdot 100) = 640 : 1024$$

$$640 : 1024 = 0,625$$

$$\begin{array}{r} 6400 \\ -6144 \\ \hline 2560 \\ -2048 \\ \hline 5120 \\ -5120 \\ \hline 0 \end{array}$$

Поново размотри дељење под а и б. Како се деле децимални бројеви?

Децималан број се дели са децималним бројем тако што се делилац и делилац помноже са децималном јединицом са онолико нула колико има децималних места у делиоцу. Затим се врши дељење као да је у питању децималан број са природним бројем (или природан са природним бројем). Резултат овог дељења је децималан број (коначан или бесконачан).

Задатак 2

Колика је цена једног метра штофа за панталоне ако је купац за 2,5 m платио 483,75 динара?

Пример 4

Петра продаје органску храну, има 126,4 килограма и жели да је упакује. Планира да упакује по 0,25 килограма у свако паковање.

- Колико паковања ће направити Петра?
- Колико ће зарадити ако по једном паковању има зараду од 1,03 евра?

Решење:

- Да бисмо израчунали колико паковања ће направити Петра, треба да поделимо укупну масу од 126,4 kg са масом једног паковања, 0,25 kg.

$$126,4 : 0,25 = (126,4 \cdot 100) : (0,25 \cdot 100) = 12640 : 25$$

$$12640 : 25 = 505,6$$

$$\begin{array}{r} -125 \\ 140 \\ -125 \\ \hline 150 \\ -150 \\ \hline 0 \end{array}$$

Добијени количник 505,6 је децималан број, тако да за број паковања (који увек мора бити природан број) треба извршити заокруживање на цео део наниже, односно Петра ће припремити 505 паковања.

- б) Да бисмо израчунали колико ће Петра зарадити од продаје 505 паковања органске хране, потребно је да помножимо 505 са 1,03, односно $505 \cdot 1,03 = 520,15$ евра.

У зависности од контекста задатка, често је потребно заокружити децималне бројеве.

Пример 5

На школску екскурзију путује 144 ученика. Ако сваки аутобус којим ће се превозити има капацитет за 44 ученика, колико аутобуса је потребно за организацију екскурзије?

Решење:

$144 : 44 = 3,27$ Заокружујемо на 4 аутобуса, како би било места за све ученике, иако неки од аутобуса неће бити попуњен до последњег места.

Задатак 3

- а) Петар ради као дизајнер и зарађује 4,25 евра по сату. Једног дана је радио 6,4 сата. Колико евра је зарадио тог дана?
- б) Касније је одлучио да зарађени новац равномерно распореди на 4 дана за дневне трошкове. Колико евра ће трошити дневно?

Задатак 4

Кројач је имао 6 комада једне врсте платна, сваки дужине 12,56 m. Од тог платна је кројио дечје хаљинице, секући по 1,57 m за сваку хаљиницу. Колико хаљиница је сашео кројач?

Зашто при множењу децималних бројева резултат може имати више или мање децималних места него множиоци? Шта се дешава при дељењу децималних бројева – како одређујемо где ће бити децимална запета у резултату?

Да би проценио колико си добро савладао лекцију, одговори на следећа питања са „Да“, „Делимично“ или „Не“:

1. Да ли разумем где се ставља децимални зарез при множењу децималних бројева?
2. Да ли могу правилно да делим децималан број са природним бројем?
3. Да ли знам како да делим два децимална броја са истим или различитим бројем децималних места?
4. Да ли могу да применим ове прорачуне у реалним ситуацијама?

Ако си на сва питања одговорио са „Да“, одлично си савладао лекцију!

Ако си на нека питања одговорио са „Делимично“ или „Не“, размисли шта ти је најтеже и потражи помоћ или поново вежбај.

Самосталан рад

1. Израчунај:

- а) $0,2 \cdot 0,3$ б) $0,7 \cdot 4,22$ в) $1,01 \cdot 6,9$ г) $0,072 \cdot 0,8$ д) $2,536 \cdot 1,55$

2. Израчунај:

- а) $6,26 \cdot 10 + 3,2 \cdot 0,5$ б) $0,98 \cdot 40 - 2,7 \cdot 6,16$

3. Ако један литар јестивог уља у продавници кошта 61,5 динара, колико новца је потребно да се купи кутија са 16 флаша од по 1 литар?

4. Од једног килограма траве добија се 0,23 kg сена.

- а) Колико килограма сена ће се добити од 23.436 kg траве?
б) Колико новца ће се добити од тог сена ако се прода по цени од 20,5 динара за 1 kg?

5. Израчунај:

- а) $7,5 : 5$ б) $0,3 : 3$ в) $4,5 : 9$ г) $4 : 0,2$ д) $28 : 0,4$
 е) $12 : 0,006$ ж) $146,3 : 41,8$ з) $9,2 : 0,46$ с) $37,37 : 5,05$
 и) $79,2 : 2,88$

6. Путник је прешао 28,305 km за 9 сати. Колико је у просеку пешачио за један сат?

7. Вртлар је купио пумпу за наводњавање за 7.589,34 динара и још 41,4 метара црева. По којој цени по метру му је наплаћено црево ако је укупни рачун износио 8.932,77 динара?

8. Из једне цеви за 8 сати исцури 163,2 литра воде, а из друге цеви иста количина исцури за 6 сати. Колико ће воде исцурети из обе цеви за 21 сат?

Веза између размере и дела целине

У свакодневном животу често се сусрећеш са поређењима између делова и целина, на пример, када припремаш рецепт, правиш планове за градњу или упоређујеш мале и стварне удаљености. Ову везу изражаваш размером и делом целине. До сада си учио/учила о деловима целине кроз разломке, као и о процентима. У овој лекцији открићеш да је размена уско повезана са овим појмовима. Научићеш како да користиш размеру да израчунаш део дате целине, али и како од датог дела да одредиш целину. Ово знање ће ти помоћи да боље разумеш пропорционалност, да решаваш практичне проблеме и да правиш тачне прорачуне у свакодневним ситуацијама.



Пример 1

У једној учионици има 30 ученика. Од тога је 18 девојчица, а остали су дечаки.

- а) У каквој су размери (односу) број девојчица и број дечака?
- б) У каквој је размери број девојчица у односу на укупан број ученика?
- в) У каквој је размери број дечака у односу на укупан број ученика?

Решење:

- а) Прво ћемо израчунати број дечака: $30 - 18 = 12$. Значи, у учионици има 12 дечака.
Размера (однос) девојчица према дечакама је: $18 : 12$.
Упростимо поделом оба броја са 6, тј. $(18 : 6) : (12 : 6) = 3 : 2$.
Дакле, однос девојчица и дечака је $3 : 2$.
Упрошћавање размере је слично као скраћивање разломака до несведивог облика.
- б) Однос броја девојчица према укупном броју ученика је: $18 : 30$.
Упростимо поделом оба броја са 6: $18 : 30 = 3 : 5$.
Дакле, размера девојчица према свим ученицима је $3 : 5$.
- в) Однос броја дечака према укупном броју ученика је: $12 : 30$.
Упростимо поделом оба броја са 6: $12 : 30 = 2 : 5$.
Дакле, размера дечака према свим ученицима је $2 : 5$.

Задатак 1

У једној кутији има 9 црвених и 6 плавих куглица.

- Одреди однос (размеру) црвених и плавих куглица.
- Одреди однос црвених куглица и укупног броја куглица.
- Одреди однос плавих куглица и укупног броја куглица.

Пример 2

Ана прави интегралне колачиће. Она има тањир са 24 колачића и жели да их подели тако да $\frac{1}{3}$ колачића да свом брату, а остатак задржи за себе.

- Колико ће колачића добити Анин брат?
- У каквом су односу колачићи које је добио брат у односу на све колачиће?
- У каквом су односу колачићи које је Ана задржала у односу на све колачиће?
- У каквом су односу братови колачићи са Аниним колачићима? Каква је веза са разломцима $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$?

Решење:

- Анин брат ће добити $\frac{1}{3}$ од 24 колачића. Знамо да уместо реч „од“ користимо множење, па је: $\frac{1}{3} \cdot 24 = \frac{1 \cdot 24}{3} = \frac{24}{3} = 8$. Брат добија 8 колачића.
- Однос броја братових колачића према укупном броју је $8 : 24$.
Скратимо: $8 : 24 = (8 : 8) : (24 : 8) = 1 : 3$. Брат добија 1 део од 3.
- Ана задржава остатак: $24 - 8 = 16$.
Однос њених колачића према укупном броју је: $16 : 24 = (16 : 8) : (24 : 8) = 2 : 3$.
Ана задржава 2 дела од 3.
- Однос броја братових и Аниних колачића је: $8 : 16 = (8 : 8) : (16 : 8) = 1 : 2$.
Дакле, укупан број делова је $1 + 2 = 3$.
Очигледна је веза са разломцима $\frac{1}{3}$ (брат добија 1 од 3 дела) и $\frac{2}{3}$ (Ана задржава 2 од 3 дела).

Задатак 2

Весна и Валбона желе да поделе 1800 динара у размери 1 : 3.
Израчунај колико ће добити свака од њих.

Пример 3

Марко и Милена су купили чоколаду са 30 коцкица и одлучили да је поделе у размери 2 : 3 (за сваке 2 коцке које добије Марко, Милена добија 3).



- а) Колико коцки ће добити свако од њих?
- б) У каквом размеру је број коцки чоколаде које је добио Марко у односу на укупан број коцки?
- в) У каквом размеру је број коцки чоколаде које је добила Милена у односу на укупан број коцки?

Решење:

- а) Дати размер је $2 : 3$. Збир делова у размеру је $2 + 3 = 5$.
Укупан број коцки је 30, па у једном делу има $30 : 5 = 6$ коцки чоколаде.
Марко добија $2 \cdot 6 = 12$ коцки.
Милена добија $3 \cdot 6 = 18$ коцки.
 - б) Број коцки које је добио Марко у размеру је $12 : 30$ у односу на укупан број коцки чоколаде.
Када се размер скрати, добија се $2 : 5$.
 - в) Број коцки које је добила Милена у размеру је $18 : 30$ у односу на укупан број коцки чоколаде. Када се размер скрати, добија се $3 : 5$.
- Допунски, одреди колики део од свих коцки чоколаде је добио Марко, а колики део је добила Милена.

Ако имаш 40 заставица и треба да их поделиш између себе и свог друга у размеру $3 : 5$, како ћеш израчунати колико ће ко добити? Можеш ли да објасниш зашто је ова подела правична према датом размеру?

На крају лекције можеш да се оцењујеш према следећим критеријумима:

1. Да ли могу да препознам различите размере у датим примерима?
(1 – не могу, 3 – могу уз помоћ, 5 – могу самостално)
2. Да ли могу да поделим целину према датом размеру и да израчунам број делова?
(1 – не могу, 3 – могу уз помоћ, 5 – могу самостално)
3. Да ли могу да применим научене вештине за поделу количина у свакодневним примерима (нпр. подела хране, новца и сл.)?
(1 – не могу, 3 – могу уз помоћ, 5 – могу самостално)
4. Да ли могу да објасним како размер утиче на то како ће се поделити целина?
(1 – не могу, 3 – могу уз помоћ, 5 – могу самостално)

Након самопроцене, можеш да разговараш о својим резултатима са наставником или са својим друговима ради бољег разумевања лекције.

Самосталан рад

1. На мапи је растојање између два града приказано као 5 cm. Ако је размер мапе 1 : 200000, колико је стварно растојање између градова?
2. У рецепту за колаче однос брашна и шећера је 3 : 2. Ако се користи 600 g брашна, колико је шећера потребно?
3. Дужина играчке аутомобила и његова стварна дужина су у односу 1 : 10. Ако је дужина играчке 45 cm, колика је стварна дужина аутомобила?
4. Да би се припремио сок, произвођач препоручује мешање у односу 1 : 4 (једна чаша сирупа са четири чаше воде). Колико сирупа је потребно да се добију 2 литра сока?
5. Фотографија димензија 15 cm и 10 cm треба да се увећа у истом размеру тако да њена дужина буде 30 cm. Колика ће бити ширина увећане фотографије?
6. Азра сваког месеца штеди $\frac{3}{5}$ своје плате. Ако је њена плата 500 евра, колико евра ће уштедети за један месец?
7. Велика чоколада је подељена у односу 2 : 3 између двоје деце, Марије и Петра. Ако је Марија добила 80 g, колико чоколаде је добио Петар?
8. Да би се офарбао један зид, боја треба да се меша у размеру 3 : 5 (боја са водом). Ако се користе 3 литра боје, колико литара воде је потребно?
9. Један аутомобил је потрошио $\frac{2}{7}$ резервоара, односно 14 литара горива, након пређених 140 km. Колико литара горива троши аутомобил на 100 km и колики је укупан капацитет резервоара?
10. На изборима за чланове ученичког парламента два кандидата су добила гласове у размеру 5 : 8. Ако је укупан број гласова 1.300, колико је гласова добио сваки од њих?
11. Ана и Бојан возе бицикле различитим стазама, али почињу у исто време. Ана и Бојан се крећу сталним односом брзина 3 : 4, односно Бојан је бржи. Ако Ана пређе 18 km за одређено време, колико километара је прешао Бојан у истом времену?

Примена правопрпорционалности у стварним ситуацијама

У свакодневном животу често се сусрећемо са ситуацијама у којима се једна величина мења у истом односу као друга. На пример, што више воћа купујемо, више ћемо морати да платимо, или што дуже путујемо истом брзином, прећи ћемо већу удаљеност. Ови примери се заснивају на математичком концепту правопрпорционалности.

У овој лекцији научићеш како да препознаш правопрпорционалне везе и како да их примениш у стварним ситуацијама. Разумевање овог концепта ће ти помоћи при решавању различитих проблема из свакодневног живота, као што су израчунавање трошкова, радног времена, брзине, густине и многих других практичних примера.



Пример 1

Једно двориште дужине 50 метара треба да се подели на два дела у размери 4 : 1 за садњу цвећа и траве. Колика ће бити дужина сваког дела?

Решење:

Размера 4 : 1 значи да је укупан број делова $4 + 1 = 5$. Дужина дворишта (50 метара) треба да се подели на 5 једнаких делова.

Један део је $50 : 5 = 10$ метара.

Део за цвеће (4 дела) је $4 \cdot 10 = 40$ m, док је део за траву (1 део) $1 \cdot 10 = 10$ m.

Дакле, део за цвеће ће бити 40 метара, а део за траву 10 метара.

Запиши размеру добијених дужина делова за цвеће и траву, па је скрати.

Шта запажаш?

Задатак 1

Јакуп је купио $\frac{3}{7}$ ружа и $\frac{2}{7}$ каранфила од укупно 49 цветова.

- Колико је ружа и каранфила купио Јакуп?
- У којој су размери руже које је Јакуп купио и укупно цвеће?
- У којој су размери каранфили које је Јакуп купио и укупно цвеће?

Пример 2

Софија чита књигу сталном брзином. За 2 сата прочитала је 60 страна. Колико страна ће прочитати за 5 сати ако настави истим темпом?

Решење:

Наравно да ће за више сати, при истом темпу, Софија прочитати више страна из књиге. Број прочитаних страна је правопрпорционалан времену које Софија проводи читајући. Израчунавамо колико страна чита за 1 сат: $60 : 2 = 30$ страна на сат. За 5 сати прочитаће 5 пута више него за 1 сат, односно $30 \cdot 5 = 150$ страна. Ако Софија чита $1\frac{1}{2}$ сата, колико страна ће прочитати? Да ли ће се у том случају смањити или повећати број прочитаних страна?

Пропорционалност је веза између две величине тако да се једна мења у одређеном односу са другом.

Правопрпорционалност значи да повећање (или смањење) једне величине доводи до пропорционалног повећања (или смањења) друге величине.

Задатак 2

Материјал за завесе дужине 8 метара кошта 7 192 динара. Израчунај колико кошта 15 метара тог материјала.

Пример 3

35 деце путовало је аутобусом на излет у ботаничку башту. Сви су плаћали исту цену за аутобуску карту. Укупна цена за сву 35-оро деце била је 8 400 динара. Следећег дана 42 детета су одлучила да иду на излет. Колика је укупна цена за 42 детета ако цена превоза по детету остаје иста?

Решење:

Ако је укупна цена за 35 деце била 8 400 динара, онда је за једно дете то $8\,400 : 35 = 240$ динара. Укупна цена за 42 деце биће $240 \cdot 42 = 10\,080$ динара.

Задатак 3

Троје другара из Хрватске стигло је у Македонију на одмор. Разменили су неколико хрватских куна (ХРК) за македонске денаре (МКД). Сви су мењали новац по истом курсу. Валерија је разменила 600 ХРК и добила 4 914 МКД.

- Карло је разменио 900 ХРК. Израчунај колико денара је добио Карло.
- Лана је добила 5.733 денара. Израчунај колико хрватских куна је Лана разменила.

Задатак 4

Јана често припрема палачинке за доручак по датом рецепту за своју четворочлану породицу. Једног дана дошли су јој бака и дека на доручак. Запиши колико ће јој бити потребно од сваке састојке да направи палачинке за 6 особа.

За 4 особе:

2 јајета, 600 ml млека,

1 мала кашичица соде бикарбоне,

$\frac{1}{2}$ чаше шећера и 400 g брашна.

Замисли да планираш путовање бициклом. Ако знаш да се сталном брзином можеш кретати 24 km за 2 сата, како ћеш израчунати потребно време да стигнеш до одређеног удаљеног 60 km истом брзином? Можеш ли објаснити зашто је ова ситуација пример праве пропорционалности?

На крају лекције размисли о свом разумевању појма праве пропорционалности и процени себе према следећим питањима. За сваку тврдњу изабери:

☒ Да | ☐ Делимично | ☒ Не

1. Умем да препознам ситуацију из стварног живота у којој постоји права пропорционалност.
2. Умем да израчунам непознату вредност у правој пропорционалној вези.
3. Умем да објасним сопственим речима зашто су две величине у правој пропорционалној вези.
4. Умем да применим праву пропорционалност у различитим контекстима (трговина, време, путовање, кување и сл.).

Ако имаш више ☒ – одлично си савладао/ла ову лекцију!

Ако имаш више ☐ – понови задатке и потражи помоћ за нејасне делове.

Ако имаш више ☒ – прочитај поново лекцију и вежбај додатне примере.

Изазов: Осмисли пример из свакодневног живота у којем можеш применити праву пропорционалност и подели га са својим школским друговима!

Самосталан рад

1. У продавници 2 килограма поморанџи коштају 180 динара. Колико кошта 5 kg поморанџи?
2. Аутомобил троши 8 l горива на сваких 100 km. Колико литара горива ће потрошити за 250 km?
3. Петар чита 30 страна књиге за 40 минута. Колико времена му је потребно да прочита 75 страна ако чита истим темпом?
4. Једна штампарија штампа по 500 књига за 4 дана. Колико ће књига одштампати за 10 дана ако брзина штампања остане иста?
5. Фабрика производи 2 400 маски за 8 сати. Колико маски ће произвести за 5 сати ако ради истим интензитетом?
6. За фарбање 20 m^2 зида потребна су 4 l боје. Колико литара боје је потребно да се офарба 50 m^2 зида?
7. У једном хотелу 3 собе коштају 12 000 динара за једну ноћ. Колико кошта 5 соба за једну ноћ ако је цена по соби иста?
8. Рецепт за пицу каже да је за прављење теста за 4 пице потребно 2 чаше брашна. Колико чаша брашна је потребно за 10 пица ако се користи исти однос?
9. Анита се припрема да прави колаче и за то су јој потребне одређене количине састојака у зависности од броја порција. За 6 порција колача потребно је: 200 g шећера, 150 g брашна и 2 јајета. Направи табелу да одредиш колико шећера, брашна и јаја ће бити потребно за 3, 9 и 12 порција колача.

Т Е М А

2

ГЕОМЕТРИЈА



Реч геометрија потиче од старогрчких речи „гео“ што значи земља и „метрија“ што значи мерење. Буквално, геометрија означава мерење земље. У стара времена људи су развили геометрију да би мерили њиве, градили путеве, храмове и зграде, и да би разумели облик света око себе.

Данас је геометрија једна од најстаријих, али и најживљих грана математике. Она нам омогућава да истражујемо облик, величину, положај и односе међу различитим геометријским фигурама као што су тачке, праве, углови, троуглови, кругови и тела у простору.

„Нема краљевског пута до геометрије.“

Резултати учења

После проучавања ове теме бићеш у стању да:

- користиш појмове кружница, круг, кружни лук, међусобни положај кружнице и тачке, кружнице и праве, две кружнице у свакодневном контексту;
- решаваш проблеме из свакодневног живота користећи појмове тачка, права, полуправа и дуж;
- користиш мерење углова, јединице за мерење углова, централни угао и углове на трансверзали при решавању проблема из свакодневног живота;
- препознајеш, поредиш и користиш особине 2Д фигура у свакодневним ситуацијама;
- конструктивно црташ троугао, уписану и описану кружницу у троугао под датим условима;
- користиш осну симетрију, ротацију око дате тачке и транслацију при решавању проблема.

Кружница и круг

Очигледно је да се у свакодневном животу често сусрећемо са облицима који су повезани са кружницама и круговима – точкови на бициклу, часовници, столови, па чак и путање кретања планета. У овој лекцији ћеш поновити и продубити знање о кружници, кругу и њиховим међусобним положајима са тачкама, правима и другим кружницама, као и научити како се ти појмови користе за решавање практичних проблема.



Пример 1

У својој свесци цртај према следећим упутствима:

1. Нацртај кружницу k :
 - Означи центар кружнице словом, на пример O .
 - Повежи центар кружнице са неком тачком на кружници. Напиши како се зове то растојање и означи га словом.
 - Повежи две тачке на кружници тако да добијена дуж пролази кроз центар кружнице. Како се зове то растојање? Означи га словом.
2. Додај тачке:
 - Изабери једну тачку унутар круга и означи је са M .
 - Изабери једну тачку на кружници и означи је са A .
 - Изабери једну тачку изван кружнице и означи је са P .
3. Нацртај праве:
 - Нацртај праву a која додирује кружницу само у једној тачки T ($a \cap k = \{T\}$).
 - Нацртај праву c која сече кружницу у тачкама A и B ($c \cap k = \{A, B\}$).
 - Нацртај праву m која не додирује кружницу ($m \cap k = \emptyset$).
4. Нацртај другу кружницу:
 - Нацртај кружницу која додирује прву кружницу и означи је.
 - Нацртај кружницу која сече прву кружницу и означи је.
 - Нацртај кружницу која нема заједничке тачке са првом кружницом и означи је.Колико решења има?

Пример 2

Прикажи различите међусобне положаје кружница и правих помоћу геометријског софтвера. Напомена: Ако немаш приступ одговарајућем софтверу за цртање, цртај у својој свесци помоћу геометријског прибора.

Решење:

- Прикажи међусобни положаје две кружнице које се додирују.
- Измери растојање између центара тих кружница одговарајућим алатом из апликације и упореди га са збиром полупречника обе кружнице.
Шта запажаш?
- Померањем центра једне од кружница, посматрај како се мења растојање између центара кружница у односу на збир њихових полупречника.

Упутство за рад: Како да ово урадиш са образовним софтвером?

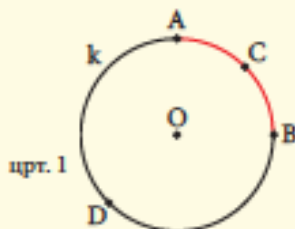
- Покрени са образовним софтвером и изабери опцију за цртање.
- Цртање кружнице:
 - Изабери алат за кружницу и постави центар кружнице одабиром тачке на површини за цртање (ако црташ помоћу прибора, центар одабери ручно).
 - Потом, у зависности од избора из падајућег менија алата за цртање кружнице, доврши поступак цртања. Најбоље је да изабереш тачку на кружници помоћу које ће се одредити њен полупречник.
- Померање тачке и мерење растојања:
 - Креирај тачку (на пример, тачку C) унутар или изван кружнице.
 - Померај тачку одговарајућим алатом и користи алат за мерење растојања да би видео како се мења растојање од тачке до центра кружнице.
 - Упореди то растојање са полупречником кружнице.
 - Направи опште белешке у вези са својим запажањима.

Пример 3

На кружници k (O, r) изабране су тачке A, B, C и D (цртеж 1). На колико делова тачке A и B деле кружницу?

Решење:

Тачке A и B , као што се види на цртежу, деле кружницу на два дела – један који садржи тачку C и други који садржи тачку D .



Део кружнице ограничѐн са две њене тачке, заједно са тим тачкама, називамо **кружни лук**.

Две различите тачке на једној кружници одређују два кружна лука.

Да бисмо правили разлику између та два кружна лука која одређују две различите тачке на једној кружници, за њихово означавање користимо три велика слова: његове две граничне тачке и једну тачку са кружнице којом је тај кружни лук одређен.

Два кружна лука са сл. 1 означавамо са $\overline{ACB}$ и $\overline{ADB}$.

Задатак 1

Дате су две кружнице k_1 (O_1 , 4 cm) и k_2 (O_2 , 3 cm). У каквом међусобном положају су ове две кружнице ако је растојање између њихових центара:

- а) $\overline{O_1O_2} = 7$ cm б) $\overline{O_1O_2} = 5$ cm в) $\overline{O_1O_2} = 9$ cm

Објасни свој одговор.

Задатак 2

Нацртај кружницу са полупречником од 35 mm, а затим означи кружни лук који одговара тетиви дужине: а) 40 mm б) 3 cm в) једнакој пречнику те кружнице

Пример 4:

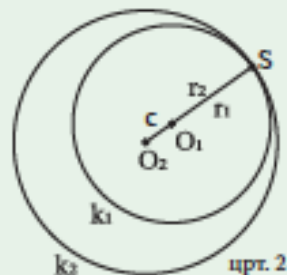
У једном парку треба да се поставе две кружне фонтане. Једна фонтана има полупречник 5 метара, а друга полупречник 7 метара. На ком растојању могу бити центри ових фонтана ако:

- а) фонтане буду једна ван друге
б) фонтане се додирују споља
в) мања фонтана се налази у већој и додирује је изнутра.

Решење:

- а) Ако растојање између центара фонтана означимо са c , онда да би фонтане биле једна ван друге, треба да важи: $c > r_1 + r_2$, односно растојање између центара мора бити веће од збира полупречника обе кружнице. Нацртај!

- б) Да би се две фонтане додиривале споља, растојање између центара фонтана треба да буде једнако збиру полупречника фонтана, односно $c = r_1 + r_2$. Нацртај!
- в) Да би мања фонтана била у већој и да је додирује изнутра, растојање између центара фонтана треба да буде једнако разлици њихових полупречника, односно $c = r_2 - r_1$, где је $r_1 < r_2$. (види слику 2).



Задатак 3

Точак бицикла има полупречник 35 cm.

- Нацртај кружницу која представља точак бицикла и на њој обележи центар кружнице. У свесци, полупречник нека буде 3,5 cm. (подсети се на скалу)
- Измери дужину пречника тачка. Колика је стварна величина?
- Нацртај полупречник тачка бицикла и означи га словом.
- У каквом међусобном положају се налазе унутрашња и спољашња ивица гуме?

У једном граду постављена су два радио-телевизијска предајника на одређеном растојању један од другог. Први предајник има антенску зону покривања са полупречником од 3 километра, док други покрива зону са полупречником од 4 километра. Предајници су постављени на растојању од 5 километара један од другог.

- Одреди да ли постоји преклапање зона сигнала, односно да ли се сигнали два предајника преклапају?
- За бољи пријем, не би требало да дође до преклапања и мешања сигнала. На којем растојању би требало поставити предајнике да не дође до мешања сигнала?

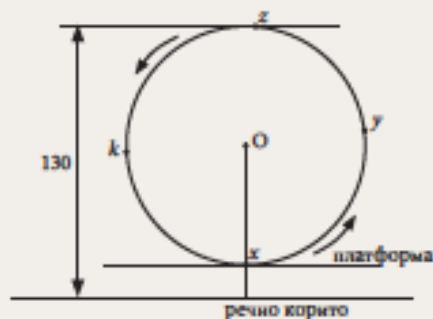
За тврдње на које је одговор ДА – наведи пример, а за тврдње на које је одговор НЕ – врати се на претходне примере и задатке који се односе на те тврдње.

- Могу да идентификујем тачку као унутрашњу, спољашњу или тачку на кружници. ДА / НЕ
- Могу да одредим да ли права додирује или сече кружницу. ДА / НЕ
- Могу да одредим међусобни положај две кружнице. ДА / НЕ
- Могу да објасним шта је кружни лук. ДА / НЕ
- Могу да означим кружни лук на датој кружници. ДА / НЕ

Самосталан рад

1. Нацртај кружницу k (O, r). Нацртај и означи полупречник те кружнице са OA и пречник AB . Које од тврђења су тачне?
а) Полупречник је половина пречника. б) Пречник је већи од полупречника.
в) Пречник је једнак полупречнику. г) Полупречник је дуго већи од пречника.
2. Нацртај k ($O, 6\text{ cm}$). Нацртај тетиву BC дужине 8 cm . Измери и одговори колико је растојање од центра кружнице до тетиве?
а) Растојање је 4 cm . б) Растојање је 6 cm .
в) Растојање је 8 cm . г) Растојање је $4,5\text{ cm}$.
3. Тачка A се налази на 6 cm од центра O кружнице чији је полупречник 5 cm . Шта од следећег је тачно за положај тачке A ?
а) Тачка A се налази на кружници.
б) Тачка A се налази унутар кружнице.
в) Тачка A се налази ван кружнице.
г) Тачка A је на пречнику кружнице.
4. Две кружнице имају центре у тачкама O и P . Прва кружница има полупречник 5 cm , а друга 7 cm . Какав ће бити међусобни положај ових кружница ако је растојање између њихових центара 12 cm ?
а) Кружнице ће се дотаћи споља. б) Кружнице ће се сецати.
в) Једна кружница ће бити унутар друге. г) Кружнице ће се дотаћи изнутра.
5. Два погонска точка имају различите полупречнике и растојање између њихових центара је 50 cm . Полупречник једног точка је 15 cm , а другог 25 cm .
а) Нацртај кружницу за сваки од два точка (користи размеру).
б) У каквом су међусобном положају кружнице? Објасни зашто.
6. Нацртај k ($O, 4\text{ cm}$), затим нацртај полупречник OM , тетиву MN и означи већи кружни лук који одговара тој тетиви. На крају повуци пречник чије су крајње тачке две тачке са означеног кружног лука.
7. Нацртај две паралелне праве и кружницу која их дотиче. Колики је полупречник добијене кружнице? Какав је однос између полупречника кружнице и растојања између те две праве?
8. На шанку у ресторану који има облик правоугаоника димензија 2 dm и 2 m треба да се поређају тањира кружног облика чији су пречници: 5 dm , 1 dm , $1,5\text{ dm}$ и 2 dm . Колико највише тањира може да се поређа дуж шанка ако треба да се стави најмање по један тањир од сваке величине?

9. Марко и Ана се налазе у парку и свако од њих има свој круг за играње. Круг Марка има полупречник од 5 метара, а круг Ане полупречник од 3 метра. Центри њихових кругова удаљени су 6 метара један од друг.
- Да ли се кругови Марка и Ане секу?
Ако се секу, колика је дужина заједничке тетиве? Нацртај скицу у размери да би одговорио/ла на питање.
 - Ако се центар круга Ане помери за 2 метра ближе центру круга Марка, да ли ће се кругови више или мање преклапати? Објасни.
10. У дворишту Бети постоји кружна цветна леја са полупречником од 8 метара. Стаза пролази кроз двориште и налази се на удаљености од 6 метара од центра цветне леје. Да би помогао/ла Бети у уређењу дворишта, одговори на следећа питања и поткрепи одговор скицом (користи своје предзнање о размери):
- Да ли стаза сече кружницу леје? Ако је одговор да, колика је дужина дела стазе који пролази кроз леју?
 - Да ли ће стаза сецати кружницу цветне леје ако се помери за 2 метра даље од центра леје? Објасни.
 - Да ли ће стаза сецати кружницу цветне леје ако се помери за 2 метра ближе центру леје? Објасни.
11. Нацртај кружницу k (O , 3 cm), затим нацртај полупречник OM , пречник MN , тетиву AB и лук ACB .
12. У центру градског парка уздиже се спектакуларно велики чатак који пружа прелеп поглед на околину (види слику).
- Пречник тркала износи 120 m.
 - Највиша тачка тркала је на висини од 130 m изнад нивоа парка.
 - Чатак ротира у смеру казаљке на сату.
- Тачка O на цртежу представља центар тркала. На којој висини (у метрима) изнад нивоа парка се налази тачка O ?
 - Чатак се креће сталном брзином и за један потпуни круг му је потребно 50 минута. Мила улази у кабину на почетној позицији X и почиње вожњу. Где ће се налазити Мила након 25 минута?
А. У тачки Y Б. Између тачака Y и Z В. У тачки Z Г. Између тачака Z и X
 - Колика је дужина пута коју ће прећи Милина кабина за 25 минута ако је дужина кружнице при једном пуном окретању 377 m? Како се назива део кружнице који ће прећи Мила?



Тангента на кружници

Тангента је један од најзанимљивијих појмова у геометрији. Свакодневно се среће у архитектури, саобраћају и технологији. У овој лекцији ћеш научити шта је тангента на кружницу, како да је препознаш, правилно нацрташ и како може да се примени при решавању задатака у реалним ситуацијама.



Пример 1

На слици је приказан мост који се пружа преко реке. Његова главна носећа конструкција има облик кружног лука. Изнад тог лука налази се права платформа по којој могу да се крећу возила или пешаци.



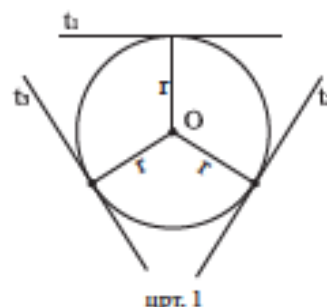
- У каквом међусобном положају се налазе кружни лук моста и права платформа која се пружа по његовој горњој страни?
- Замисли да је носећа конструкција део целе кружнице. Да ли можеш да уочиш сличност са неким положајем праве и кружнице који сте учили на часовима математике?

Тангента на кружницу је права која има једну заједничку тачку са кружницом, која се назива тачка додир.

Пример 2

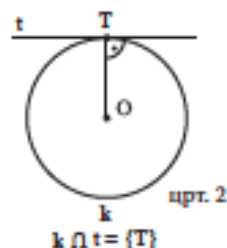
У својој свесци нацртај кружницу са произвољним полупречником и центром O . Затим нацртај најмање две различите праве које су на растојању од центра кружнице једнаком полупречнику те кружнице (види слику 1).

- Каквом међусобном положају се налазе нацртане праве у односу на кружницу?
- За сваку тангенту, повежи тачку додир са центром кружнице. Измери угао који свака тангента заклапа са полупречником добијеним повезивањем тачке додир и центра кружнице. Шта можеш да закључиш из свог истраживања?



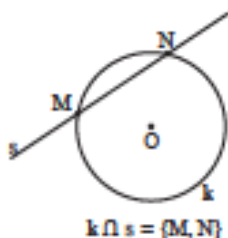
Нацртај кружницу $k(O, r)$ и полупречник OT , где је T произвољна тачка на кружности. Нацртај тангенту на кружницу која пролази кроз тачку T .

Тангента на кружницу је нормална (под правим углом) на полупречник кружнице који спаја центар кружнице са њеном тачком додира.



Пример 3

На кружници $k(O, r)$ изабери две тачке M и N кроз које ће пролазити секанта кружнице.



Права која сече кружницу у две тачке зове се секанта.

Задатак 1

У једном граду планира се изградња новог трга. На тргу ће бити велика фонтана у облику кружнице. Полупречник фонтане је 8 метара. Планирано је постављање стазе која ће бити тангента на кружницу фонтане.

- На којем растојању ће бити стаза од центра фонтане?
- Направи цртеж. Како ћеш нацртати стазу? При цртању користи размеру.

Пример 4

У једном парку постоји велика цветна леја кружног облика. Планирано је постављање украсног камена у једној тачки P која се налази изван кружнице цветне леје. Затим се планира постављање стазе која ће пролазити кроз украсни камен и додиривати леју у једној тачки. Како да нацрташ стазу која пролази кроз тачку P (украсни камен) и представља тангенту на кружницу леје? Који је тачан метод за цртање ове стазе користећи само троугао и лењир?

Решење:

- Прво, нацртај цветну леју (кружницу) са центром у тачки O и полупречником r .
- Означи тачку P (украсни камен) изван кружнице.
- Помоћу троугла и лењира нацртај тангенту која пролази кроз тачку P и додирује кружницу у тачки T . Колико таквих стаза (тангенти) може да се постави? Како можеш проверити да ли је тачно нацртана стаза која пролази кроз украсни камен и додирује фонтану?

Из дате тачке изван кружнице могу се повући тачно две тангенте до кружнице.

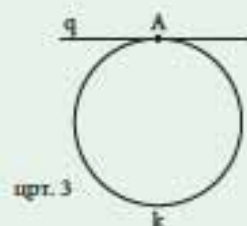
У овој лекцији очекује се да црташ уз помоћ лењира.

Пример 5

Стаза за возила је пројектована као кружница са радијусом од 50 m. Заштитна ограда за ову стазу треба да буде права линија која дотиче стазу на одређеном месту. Представи кружницу и заштитну ограду цртежом.

Решење:

Цртеж приказује кружницу (кружну стазу) и заштитну ограду која дотиче стазу у тачки А.



Задатак 2

Приликом изградње скејт-полигона кружног облика са радијусом од 10 m, на удаљености од 25 m од центра кружнице постављен је путоказ. Од путоказа до скејт-полигона планиране су две стазе које дотичу кружницу полигона. Колике су дужине тих стаза?

Упутство: Користи размеру, представи ситуацију цртежом, а затим помоћу мерења одреди дужину стаза.

- 1) Која је разлика при цртању тангенте на кружницу када треба да је повучеш:
 - а) кроз тачку на кружници
 - б) кроз тачку изван кружницеПредстави оба случаја цртежом.
- 2) Колика је удаљеност од центра кружнице до заједничке тачке са тангентом (или секантом) у поређењу са радијусом кружнице?

Одговори у своју свеску:

- Да ли умет да препознам тангенту на кружницу? ДА / НЕ
 - Да ли умет да нацртам тангенту из дате тачке? ДА / НЕ
 - Да ли умет да применим тангенте у практичним ситуацијама? ДА / НЕ
- Објасни свој одговор.

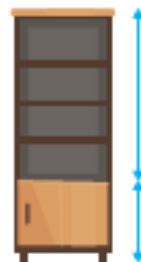
Самосталан рад

- У парку кружног облика, полупречника 30 метара, планира се постављање светиљки на 5 метара од ивице (кружнице) парка. Која од наредних дужина представља полупречник кружнице коју чине светиљке?
 - 25 метара
 - 35 метара
 - 30 метара
 - 20 метара
- На кружној бициклическој стази пречника 30 метара треба да се изгради излаз који ће бити тачка додира са другом правом стазом. Колико је растојање од центра кружне стазе до излаза?
 - 0 метара
 - 15 метара
 - 30 метара
 - 20 метара
 - Која особина тангенте ће помоћи у дизајнирању стазе од излаза до суседне стазе?
 - Ако се полупречник бициклическе стазе повећа на 20 метара, да ли излаз и даље остаје тачка додира стазе која се гради?
- Фонтана у парку је кружног облика, полупречника 12 метара. Почевши од тачке А која је удаљена 15 метара од центра кружнице, треба поставити стазу која ће бити њена тангента.
 - Која од следећих дужина је једнака растојању од центра кружнице до тачке додира тангенте и кружнице?
 - 10 m
 - 12 m
 - 15 m
 - 20 m
 - Која од следећих дужина је једнака растојању од тачке А до тачке додира тангенте и кружнице? Користи цртеж у размери.
 - 5 m
 - 8 m
 - 9 m
 - 10 m

Графичко сабирање и одузимање дужи

Сабирање и одузимање дужи је основни део геометрије који се користи у многим практичним ситуацијама.

У овој лекцији ћеш научити како да сабираш и одузимаш дужи користећи шестар. Поред тога, научићеш да разликујеш колинеарне тачке и како да конструишеш дуж једнаку датој дужи. Ова техника ће ти омогућити прецизно конструисање дужина и примену стечених знања у различитим ситуацијама.



Пример 1

Томислав жели да иде од куће до школе, али на путу има две станице на којима мора да стане, а то су: станица А и станица В.

- Растојање од његове куће до станице А је 3 km.
- Растојање од станице А до станице В је 2 km.
- Растојање од станице В до школе је 4 km.

- Нацртај дужи које представљају пут од Томислављеве куће до школе, преко станица А и В.
- Израчунај укупно растојање (графички и аритметички) које Томислав треба да пређе да би стигао до школе.
- Ако је Томислав већ прешао пут од куће до станице А, колико километара му је остало до школе?

Решење:

а) а) У ком размеру су нацртана растојања?

б) $3 \text{ km} + 2 \text{ km} + 4 \text{ km} = 9 \text{ km}$. Томислав треба да пређе 9 km да би стигао до школе.



3 cm

2 cm

4 cm

в) $9 \text{ km} - 3 \text{ km} = 6 \text{ km}$. Ако је Томислав већ прешао пут од куће до станице А, до школе му је остало још 6 km.

Пример 2

Један инжењер треба да постави светиљке за осветљавање стазе у парку. Стаза је права линија, а инжењер планира да постави три светиљке на одређене позиције:

- Светиљка А се поставља на почетак стазе.
- Светиљка В се поставља на средину између А и С.
- Светиљка С се поставља на крај стазе.

- Нацртај праву која представља стазу и обележи тачке А, В и С.
- Провери да ли су светиљке А, В и С на истој правој.
- Ако је растојање од А до В 5 метара, израчунај растојање од А до С.

Решење:

а)

б) Тачке А, В и С су на истој правој.

За тачке које се налазе на истој правој каже се да су колинеарне тачке.

- в) Растојање од тачке А до тачке С (ако су тачке А, В и С колинеарне и тачка В се налази између тачака А и С) једнако је збиру растојања од А до В и од В до С: $5\text{ m} + 5\text{ m} = 10\text{ m}$. Растојање од тачке А до тачке С је 10 метара, односно $AB = 10\text{ m}$.

Пример 3

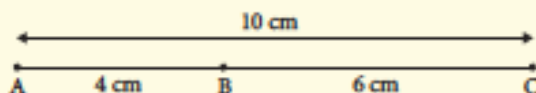
Да ли су тачке А, В и С колинеарне ако:

- а) $AB = 6\text{ cm}$, $BC = 4\text{ cm}$, $AC = 10\text{ cm}$ б) $AB = 5\text{ cm}$, $BC = 7\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$

Решење:

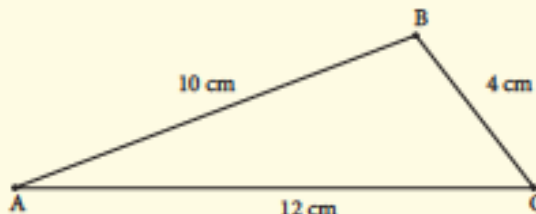
- а) Ако графички саберемо дужи АВ и ВС, добијамо дуж АС, односно $AC = AB + BC$.

То је приказано на цртежу:



Тачке А, В и С су колинеарне.

- б) У овом случају, ниједно од растојања не може да се као збир друга два, па тачке А, В и С нису колинеарне: $AC = AB < BC$



За било које три тачке М, N и Р важи: Растојање од тачке М до тачке Р није веће од збира растојања од М до N и од N до Р, односно: $MP \leq MN + NP$

Пример 4

Јана жели да огради две баште у облику квадрата, са различитим дужинама стране. Након извршеног мерења, утврдила је:

- Прва башта има страну $AB = 5\text{ m}$.
- Друга башта има страну $CD = 3\text{ m}$.

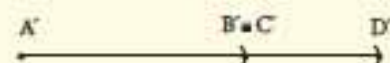
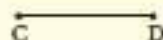
Јана жели да сабере ове две дужине (укупан обим оградe), али жели и да зна колико је страна АВ дужа од стране CD.

Решење:

а) Помоћу лењира цртамо дужи $\overline{AB} = 5\text{ m}$ и $\overline{CD} = 3\text{ m}$.

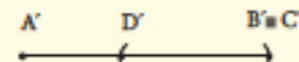
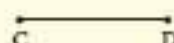
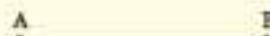
б) Да би могао/могла и ти да конструишеш дуж $A'D'$, чија дужина је збир дужи AB и CD , ради као Јана:

- Шестаром измери дужину дужи AB .
- Пренеси ту дужину на полуправу коју ћеш нацртати, обележавајући је као $A'B'$ (при чему је тачка A' почетна тачка полуправе).
- Затим шестаром измери дужину дужи CD .
- Иглу шестара постави у тачку B' и пренеси ту дужину, добијајући кружни лук. Тамо где лук сече полуправу, обележи тачку као D' .
- Нова дуж $A'D'$ имаће дужину једнаку збиру дужина AB и CD , односно $A'D' = AB + CD$.



в) Да би конструисала дужину једнаку разлици дужи AB и CD , Јана следи ове кораке – а и ти уради исто:

- Нацртај полуправу и изабери почетну тачку A' .
- Шестаром измери дужину дужи AB .
- Пренеси је на полуправу и обележи као $A'B'$.
- Измери дужину дужи CD .
- Постави иглу шестара у тачку B' , а кружни лук нацртај у правцу тачке A' . Тамо где лук сече дуж $A'B'$, означи ту тачку као D' .
- Дуж $A'D'$ има дужину једнаку разлици дужина AB и CD , тј. $A'D' = AB - CD$.

**Задатак 1**

Дат је правоугаоник са дужинама страница 2 cm и 3 cm . Графички одреди обим правоугаоника.

Задатак 2

Ана планира да купи два комада намештаја за своју дневну собу:

- Један тросед дужине $\overline{AB} = 2\text{ m}$
- Једну фотељу дужине $\overline{CD} = 1,5\text{ m}$

а) Нацртај дужи AB и CD које представљају дужине намештаја.

б) Конструиши нову дуж чија је дужина, једнака укупној дужини намештаја (троседа и фотеље).

- в) Ако је дужина зида у дневној соби 5 m, израчунај да ли ће остати простора на зиду, ако Ана постави оба комада намештаја једно поред другог.
- г) Ако је дужина најдужег зида 5 m, а Ана на ту страну собе постави само тресед, колика дужина остаје за неки други комад намештаја?

Задатак 3

Давид има цветну леју у облику правоугаоника. Дужина једне стране је $\overline{AB} = 4$ m, а дужина друге стране је $\overline{CD} = 3$ m.

- а) Нацртај дужи $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ које представљају странице леје.
- б) Конструирај нову дуж чија је дужина збир дужина $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.
- в) Одреди конструкцијом – колико укупно метара оgrade је потребно Давиду ако постави ограду око целе леје? (Узми у обзир све четири стране).



Како тачно мерење и одређивање дужине дужи може утицати на процес дизајнирања намештаја или приказивања раздаљина на мапи? Објасни зашто је важно да се користе прецизни мерни алати, као што су лењир или шестар, и како то може побољшати резултате у стварним ситуацијама, као што су израда намештаја или мерење раздаљина.

Запиши одговоре у своју свеску. Ако ниси сигуран у неке делове, врати се на одговарајуће делове лекције.

- Да ли умет да сабирам и одузима дужи помоћу шестара?
- Да ли разумем разлику између графичког и аритметичког сабирања и одузимања дужи?
- Како могу да применим ово знање у практичним ситуацијама?

Самосталан рад

У неким задацима постоји потреба за коришћењем размера.

1. У једној улици постоји простор за паркирање аутомобила. Дужина паркинга је 24 метра, а дужина једног аутомобила је 4 метра. Ако између два аутомобила треба да постоји најмање 1 метар растојања, графички прикажи како ће изгледати распоред аутомобила и израчунај колико аутомобила може да се паркира на том паркингу.
2. Поред правог аутопута постављена су три стуба у тачкама М, N и Р. Растојања између стубова су: $\overline{MP} = 5 \text{ km}$, $\overline{MN} = 7 \text{ km}$. Колико је растојање између стубова у тачкама N и Р ако:
а) стуб Р се налази између стубова М и N б) стуб М се налази између стубова N и Р
3. Мирко планира да изгради ограду око свог дворишта. Двориште има облик правоугаоника дужине 8 метара и ширине 5 метара.
а) Графички одреди укупну дужину оgrade око дворишта.
б) Ако један панел-ограде који ће се користити има дужину од 6,5 метара, графички прикажи колико панела ће бити потребно да се изгради цела ограда.
4. Један инжењер планира да изгради мост који ће се састојати од два дела:
 - Први део има дужину једнаку 4,2 m.
 - Други део има дужину једнаку 3,8 m.а) Нацртај дужи АВ и CD, које представљају дужине делова.
б) Конструирај нову дуж која представља укупну дужину моста.
в) Ако инжењер одлучи да скрати мост за 2 m, конструирај нову дуж која представља скраћену дужину моста.
5. Јасна жели да направи стазу у свом дворишту која ће бити права линија. Стаза почетно, треба да има дужину од 10 m, али ће са једне стране морати да се уклони један део стазе, како би се поставио улаз у двориште. Дужина улаза ће бити 4 m. Конструкцијом одреди колика ће бити нова дужина стазе.
6. Лена има траку укупне дужине $AB = 12 \text{ dm}$. Жели да је искористи за украшавање две полице у свом дому. Дужина траке потребна за украшавање сваке полице је $CD = 5 \text{ dm}$.
а) Нацртај дуж АВ која представља укупну дужину траке и дуж CD која представља дужину једне полице.
б) Помоћу шестара, конструирај нову дуж која представља преосталу дужину траке.
в) Израчунај колико центиметара траке ће остати након украшавања обе две полице.

Конструисање паралелних и нормалних права и симетрале дужи

У овој лекцији ћеш научити како да конструишеш паралелне и нормалне праве, као и како да нацрташ симетралу дужи. Ови појмови су веома важни за разумевање геометријских својстава права и дужи и помоћи ће ти у решавању различитих геометријских задатака.

Са овим знањем ћеш моћи да радиш са различитим геометријским конструкцијама и стекнеш нове вештине које ће ти помоћи у решавању сложенијих геометријских проблема.



Пример 1

Марко жели да нацрта улицу која је паралелна постојећој улици и другу улицу која се сече са том улицом под правим углом. Такође, треба да постави семафор на средини пешачког прелаза.

- Помоћу геометријског прибора, нацртај једну праву, а затим нацртај другу праву која је паралелна са првом.
- Нацртај другу праву која је нормална (под правим углом) на прву.
- Дата је дуж која представља пешачки прелаз. Нацртај симетралу те дужи како би обележио средину на којој ће бити постављен семафор.

Решење:

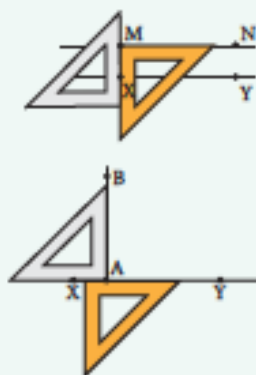
- Користећи лењир, нацртај једну праву:

Да би нацртао паралелну праву, постави троугласти лењир уз други троугласти лењир и померај га нагоре или надоле све док не добијеш паралелну праву.

- За нормалну праву, користи прави угао троугласти лењир тако што: једна његова страна лежи на првој правој, а друга је под правим углом у односу на њу.

- Да би нацртао симетралу дужи, прати следеће кораке:

- Постави лењир на дуж и измери њену дужину.
- Подели ту дужину на пола и означи средишњу тачку дужи.
- Постави лењир тако да једна његова страна буде на дужи, а друга пролази кроз средишњу тачку под правим углом.
- Нацртај нормалну праву која сече дуж на пола – то је њена симетрала.





Пример 2

На прозору треба да се поставе две украсне лајсне као на слици. Оне треба да буду постављене тако да једна пролази кроз средину и да буде под правим углом у односу на другу лајсну. Помози мајстору да исправно постави лајсне. Да бисмо искористили математику у решавању овог стварног проблема, користићемо шестар и предзнања о симетрали дужи.



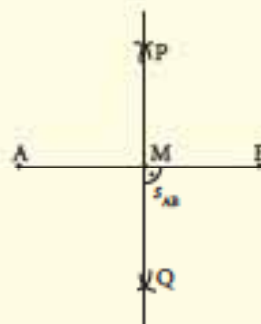
Решење:

Кораци за конструкцију лајсни помоћу шестара:

- Помоћу лењира нацртај хоризонталну лајсну као дуж одређене дужине (на пример, 4 cm).
- Обележи крајње тачке дужи и означи их словима А и В.
- Постави врх шестара у тачку А и отвори га на више од половине дужине дужи.
- Нацртај лук изнад и испод дужи са обе стране.
- Без да мењаш отвор шестара, понови исто из тачке В, тако да се оба пара лукова секу.
- Обележи тачке у којима се лукови секу изнад и испод дужи као Р и Q.
- Повежи тачке Р и Q помоћу лењира.
- Ова права дели дуж АВ на два једнака дела и нормална је на њу. То је симетрала дужи АВ, ознака s_{AB} .
- Обележи средишњу тачку као М.

Ова лајсна је нормална на прву, што значи да са њом формира угао од 90° .

Са овим корацима мајстор ће моћи правилно да постави лајсне на прозору!



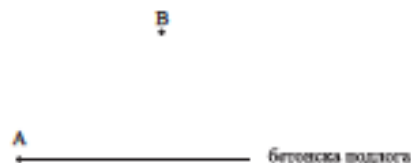
Задатак 1

Прецртај дужи у своју свеску и конструиши њихове симетрале.



Пример 3

На градилишту треба да се поставе два стуба нормална на бетонску подлогу која је већ изграђена. При томе, за један се зна у којој тачки на подлози треба да се постави, а за други на којем растојању од плоче треба да стоји. Као инжењер на градилишту, имаш задатак да направиш конструкцију којом ће бити приказана оба стуба.



Решење:

Кораци за конструкцију два стуба

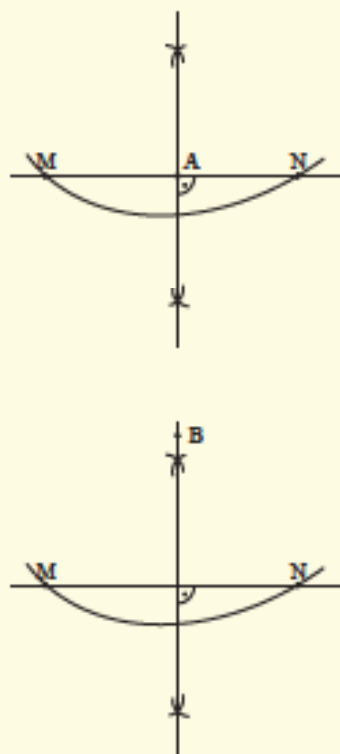
I. Конструкција стуба у датој тачки на бетонској подлози (Конструкција нормале на праву кроз дату тачку која лежи на тој правој)

- Помоћу лењира нацртај хоризонталну праву p , која представља бетонску подлогу.
- Одабери тачку A на правој p и означи је као место првог стуба.
- Постави врх шестара у тачку A и цртањем кружног лука означи две тачке M и N на подлози — једну лево и једну десно од A .
- Без да мењаш отвор шестара, постави врх шестара у тачку M и нацртај лук изнад и испод праве.
- Без да мењаш отвор шестара, понови исто из тачке N , тако да се лукови секу.

Повежи тачку A са тачком у којој се лукови секу — та права је нормална на подлогу и представља први стуб.

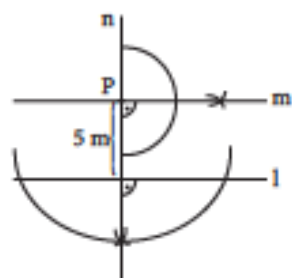
II. Конструкција другог стуба који пролази кроз тачку ван бетонске подлоге.

Овај случај је конструкција нормале на праву кроз тачку која не лежи на тој правој. Искористи понуђени цртеж према којем ћеш записати кораке у свеску и направити тражену конструкцију.



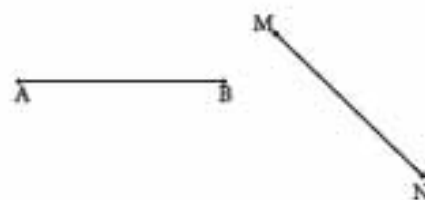
Пример 4

Ради бољег хортикултурног уређења, двориште треба да се подели на више делова повлачењем паралелних правих које су на растојању од 5 метара једна од друге. Дате су права l и тачка P која је на растојању од 5 m од l . Твој задатак је да конструишеш праву m такву да важи: $m \parallel l$ и да пролази кроз P . Искористи дати цртеж, запиши кораке конструкције и нацртај је у својој свесци.



Задатак 2

Прецртај дужи у своју свеску. Кроз тачку S , која је пресечна тачка симетрала дужи AB и MN , конструиши праву p која је нормална на праву AM и праву q која је паралелна са правом BN .



Пример 5:

На једној улици треба да се постави нова аутобуска станица. Платформа станице треба да буде нормална на ивицу тротоара, а кровна конструкција треба да буде паралелна са њом. Као инжењер, имаш задатак да направиш тачну конструкцију за правилно постављање платформе и крова.

- Конструиши платформу као дуж нормалну на ивицу тротоара.
- Конструиши праву која ће бити паралелна са ивицом тротоара и која ће представљати кровну конструкцију.

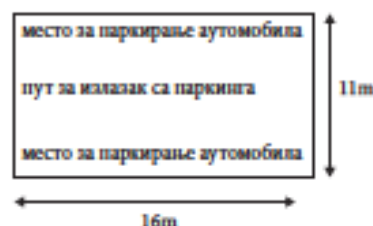
Решење:

Кораци за конструкцију:

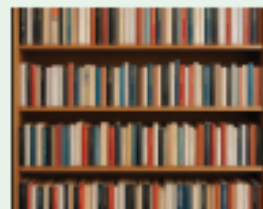
- Нацртај праву p , која представља ивицу тротоара.
- Одабери тачку A на тој правој, где ће бити постављена платформа.
- Помоћу шестара: Означи две тачке B и C на правој p , на једнаком растојању од A .
- Постави врх шестара у тачку B и са радијусом већим од половине дужи BC , нацртај лук изнад.
- Затим постави шестар у тачку C са истим радијусом и нацртај други лук који се сече са првим.
- Означи тачку пресека као D и повежи је са A . Добијена дуж AD је нормална на p и представља платформу.
- За кровну конструкцију:
 - Одабери тачку E кроз коју ће пролазити кров.
 - Користећи шестар, конструиши праву q паралелну са p која пролази кроз E .
 - Та права q представља кровну конструкцију.

Задатак 3

На цртежу је представљен простор за паркирање на којем треба да се исцртају паралелне линије којима ће бити означена паркинг-места за аутомобиле. Она треба да буду распоређена у два реда и да се остави простор између редова за излазак са паркинга. Исцртај линије на простору за паркирање и одреди колико највише аутомобила може да стане на овај паркинг ако простор за један аутомобил треба да има облик правоугаоника димензија $4\text{ m} \times 2\text{ m}$. (Димензије паркинга су 16×11 метара, а излаз је широк три метра на страни паркинга дужине 11 метара).



Како би могао да користиш паралелне и нормалне праве, као и симетралу дужи у свакодневним ситуацијама, на пример, у архитектури, дизајну намештаја или чак у сликарству? Објасни како ти ове конструкције могу помоћи да направиш прецизне и уредне цртеже.

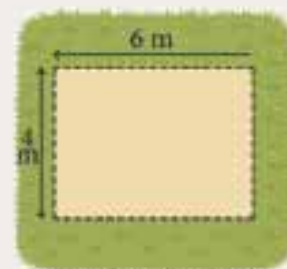


Одговори у своју свеску. За оно у шта ниси сигуран, поново се врати на те делове лекције.

1. Колико добро разумем основне геометријске појмове, као што су паралелне и нормалне праве и симетрала дужи и њихову конструкцију?
2. Да ли успевам да користим ове конструкције у задацима повезаним са дизајном, архитектуром или свакодневним ситуацијама?
3. Која конструкција ми је била најтежа за разумевање и зашто?
4. Која конструкција ми је била најлакша и како сам је примењивао?
5. Да ли се осећам спремно да применим ове геометријске концепте у новим задацима или изазовима?

Самосталан рад

1. Паралелно са датом улицом са исте стране треба да поставиш две паралелне стазе за пешаке. (користи размеру)
 - а) Конструираш две паралелне стазе користећи шестар, тако да прва стаза буде на растојању од 3 метра од улице, а друга на растојању од 6 метара од прве стазе.
 - б) Одреди растојање између улице и друге стазе.
2. У пројекту за уређење дворишне површине имаш задатак да поставиш цветну башту која ће бити нормална на стазу за пешаке у дворишту.
 - а) Изабери тачку на главној стази од које ћеш почети да градиш цветну башту.
 - б) Конструираш нормалну праву из те тачке која ће пресецати главну стазу и дуж те праве ће бити цветна башта.
3. Дате су две тачке на растојању од 8 cm једна од друге. Нађи средишњу тачку између те две тачке конструкцијом симетрале.
4. У пројекту за изградњу стазе треба да конструираш две паралелне праве које ће представљати доњу и горњу страну стазе. Ширина стазе је 2 m. Потом треба да конструираш нормалну стазу код које је растојање између леве и десне стране (ширина) стазе 2,5 m.
5. Парк има облик правоугаоника са димензијама 6 m и 4 m. У пројекту за планирање стаза у парку треба да поставиш две стазе. Прва стаза треба да буде постављена паралелно са дужином парка на растојању од 1 m, а друга стаза треба да буде нормална на прву и да је дели на два једнака дела.

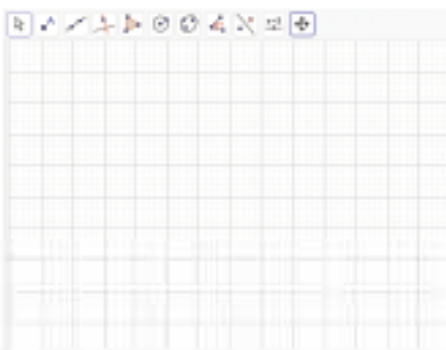


Конструкција геометријских елемената помоћу образовног софтвера

У овој лекцији упознаћеш се са важним аспектом геометрије — конструкцијом геометријских елемената, али уз помоћ савременог образовног софтвера. Коришћење дигиталних алата за цртање и конструисање у геометријским задацима значајно олакшава процес учења, дајући нам могућност да визуализујемо и испитамо геометријске конструкције на једноставнији и интерактивнији начин.

Циљ ове лекције није само да развијеш техничке вештине за рад са софтвером, већ и да побољшаш своје разумевање основних геометријских концепата. Уз помоћ интерактивних алата постаћеш сигурнији и ефикаснији у решавању геометријских проблема.

Софтвери као што су GeoGebra, Geometer's Sketchpad и други слични алати омогућавају динамичну интеракцију са геометријским објектима и чине математику разумљивијом и ближом стварном животу. Геометријски софтвери се користе за тачно и брзо извођење геометријских конструкција, што ће ти користити у даљем учењу геометрије, као и у свакодневним задацима који укључују планирање, дизајн и анализу.



Пример 1

У једној фабрици за играчке праве се различите компоненте за играчке. Твој задатак је да нацрташ део играчке који треба да има правоугаони облик са странама 6 cm и 4 cm.

Решење:

Да би направио ову конструкцију, требаће да користиш више геометријских конструкција.

1. Конструкција дужи једнаке датој дужи: Почни постављањем једне дужи на радној површини дужине 6 cm. Твој задатак је да нацрташ дуж једнаке дужине датој дужи (AB).
2. Конструкција нормалних правих: Кроз крајње тачке дужи конструиши две нормалне праве.
3. Обележи две тачке C и D на свакој од добијених нормали, по једну на растојању 4 cm од крајњих тачака прве дужи (C, D).
4. Повежи четири тачке како би формирао правоугаоник. Размисли и запиши кораке конструкције уколико прво користиш особину паралелних страница правоугаоника.

Пример 2

Користи алатке у образовном софтверу, на пример, GeoGebra, да конструишеш дуж једнаку датој дужи, симетралу дужи, као и паралелне и нормалне праве.

Решење:

- Конструкција дужи једнаке датој дужи: Изабери једну дуж и користи алатку за копирање да конструишеш другу дуж исте дужине.
- Конструкција симетрале: Изабери одговарајућу алатку из менија и креирај симетралу дате дужи.
- Конструкција паралелних и нормалних правах: Одговарајуће алатке ти омогућавају да креираш праве које су паралелне или нормалне на дату праву.

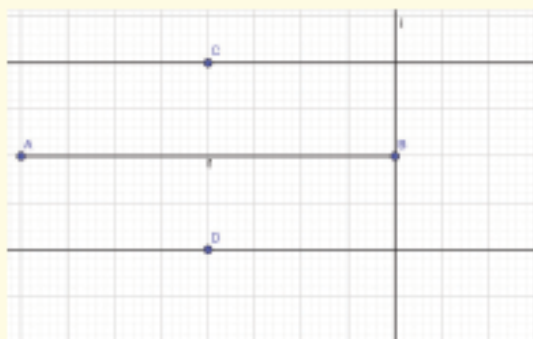
Пример 3

Користи образовни софтвер за цртање пешачког прелаза на улици.

1. Нацртај праву која представља улицу: започни цртањем једне дужи која ће представљати средишњу линију улице.
2. Користи паралелне линије за означавање ивица прелаза: нацртај две паралелне линије са сваке стране дужи која представља улицу. Ове линије ће означавати ивице пешачког прелаза.
3. Користи нормалне линије за означавање „зебри“ на прелазу: нацртај нормалне праве на паралелне линије које ће представљати линије „зебри“ на пешачком прелазу.

Решење:





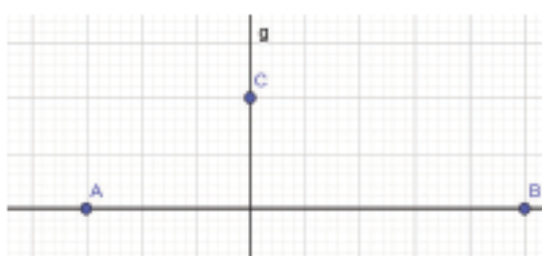
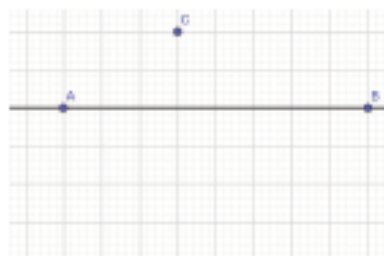
Пример 4

Радиш на плану за изградњу моста. Твој мост треба да има заштитну ограду.

- Нацртај дуж која представља мост.
- Користи симетралу да поделиш мост на два једнака дела.
- Додај паралелне линије да обележиш стране моста.
- Нацртај нормалне праве на мосту које ће представљати стубове који држе мост.

Користи образовни софтвер за овај задатак.

На сликама је приказана процедура за цртање нормалне праве на АВ у тачки С која не лежи на правој АВ.





Нацртај план за нов јавни простор / објект (парк, мост или улицу). Користи образовни софтвер за:

- Конструкцију дужи које ће представљати главну структуру.
- Користи симетрале, паралелне и нормалне праве да дизајнираш детаље. Покушај да употребиш и друге алате у софтверу да представиш простор.

Затим одговори на следећа питања:

- Који кораци су били најлакши, а који најтежи за конструкцију?
- Како ти је образовни софтвер помогао да будеш прецизнији?
- Шта би урадио другачије следећи пут?

Самооцени се помоћу следеће скале:

- Јасно разумем концепт дужи и симетрале.
- Знам да конструишем паралелне и нормалне праве у софтверу.
- Могу самостално да применим геометријске конструкције у реалним ситуацијама.

Самосталан рад

Ако имаш могућност, решавај задатке користећи геометријски софтвер. У супротном, ради у својој свесци (користи размер).

1. У парку постоји стаза дуга 6 m. Треба направити другу стазу која пролази кроз средину прве и нормална је на њу.
2. Дата је права и тачка која не лежи на њој. Кроз дату тачку конструиши праву паралелну датој.
3. а) Нацртај правоугаоник који представља основу тениског терена у дворишту.
б) Нацртај обе дијагонале правоугаоника и обележи их.
в) Конструиши симетралу једне од дијагонала. Кроз које место пролази симетрала? Шта можеш да кажеш о дијагоналама правоугаоника?
4. Две пешачке стазе треба да се укрсте под правим углом у датој тачки једне од њих. Представи конструкцију ове ситуације у својој свесци.
5. Прозор има облик квадрата. Повучеш једну дијагоналу квадрата. Кроз средишњу тачку дијагонале конструиши праву нормалну на дијагоналу.
а) Кроз које тачке пролази права нормална на дијагоналу?
б) Шта можеш да кажеш о правој нормалној на дијагоналу?

6. Башта у облику правоугаоника треба да се подели на два једнака дела. Коју геометријску конструкцију ћеш користити? На колико начина се може поделити?
7. Два моста треба да буду паралелна и да пролазе кроз две дате тачке. Конструиши паралелне праве које пролазе кроз две дате тачке да би приказао ситуацију.
8. У парку правоугаоног облика ($9\text{ m} \times 6\text{ m}$) треба поставити стазе тако да једне буду распоређене паралелно са дужином правоугаоника на свака 3 m , а друге нормално на ширину правоугаоника на свака 2 m . Конструиши те стазе. Објасни које су међусобно паралелне, а које међусобно нормалне стазе. Зашто?

Основни појмови за углове и полуправе

У свакодневном животу често се сусрећемо са облицима, линијама и угловима – од дизајна прозора и врата у нашим домовима до закривљених стаза у парковима. Да бисмо их разумели и користили, важно је да познајемо основне геометријске појмове, као што су полуправе и углови.



У овој лекцији ћеш научити појмове: полуправа, конвексни и неконвексни углови и како да их примениш у свакодневним ситуацијама – при дизајнирању простора и решавању проблема.

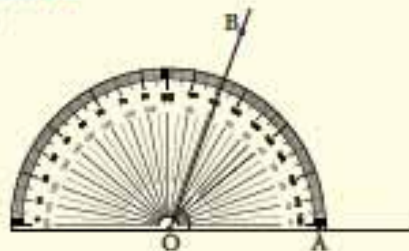
Пример 1

Ана поставља соларни панел у свом дворишту. Да би добила најбољи угао за приманье сунчеве светлости, панел треба поставити под углом од тачно 67° . Она је нацртала угао на папиру, али не зна како да означи његове елементе да би га измерила и проверила да ли је тачан. Да помогнеш Ани:

- а) Нацртај угао мере 67° .
- б) Именуј елементе угла (теме и краке).

Решење:

а)



- б) Теме угла је О. На сваком краку одабери по једну тачку и означи их — на једном краку, на пример, са А, а на другом са В. (Краци угла су ОА и ОВ.)

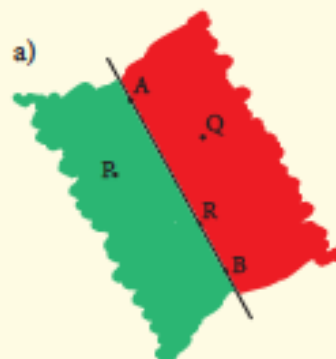
Пример 2

У парку се гради стаза која треба да подели парк на два дела – део са цветним лејама и део са травњаком. Инжењери су почели да означавају стазу као праву линију АВ.

- а) Означи различитим бојама делове са обе стране праве АВ.
б) Одреди и запиши које тачке са равни парка припадају једној, а које другој страни праве.
в) Речима објасни шта значи појам полуправа.

Решење:

- б) Тачка Р је у зеленом делу равни, тј. са леве стране праве АВ. Тачка Q је у делу равни обојеном у црвено, тј. са десне стране праве АВ. Тачка R се налази на правој АВ.
в) Полураван је део равни који је ограничен једном правом и садржи све тачке са једне стране те праве, заједно са самом правом.



Све тачке у једној равни које се налазе на истој страни дате праве, заједно са том правом, чине геометријску 3D форму која се назива полураван. За праву *m* кажемо да је гранична права или ивица те полуравни.

Задатак 1

Замисли да је стакло на прозору или површина врата једна раван. Ако поставиш линију која дели стакло или врата на два дела, који делови су полуравни?

Пример 3

На цртежу су дата два угла.

- Који угао је мањи, а који већи од 180° ?
- Прецртај углове у своју свеску и означи сваки угао.
- Изабери тачке на крацима сваког угла и повежи их.
- Шта можеш да кажеш о дужи коју добијеш у сваком углу, чије су крајње тачке тачке са кракова тог угла?

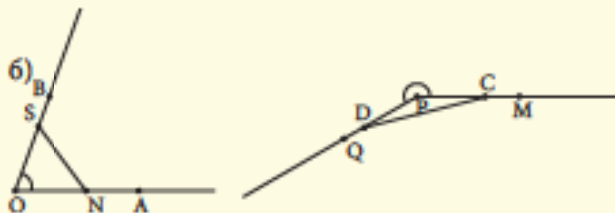


Решење:

- $\angle AOB = 70^\circ$ је мањи од 180° .
 $\angle MPQ = 210^\circ$ је већи од 180° .

- Дуж NS је таква да су јој крајње тачке тачке са кракова и она лежи у потпуности у $\angle AOB$.

Дуж CD је таква да су јој крајње тачке са кракова угла, али она не лежи у $\angle MPQ$.
 Закључујемо да се углови $\angle AOB$ и $\angle MPQ$ разликују.



За један угао кажемо да је конвексан ако свака дуж чије су крајње тачке тачке са кракова тог угла у потпуности лежи у том углу.

Појам конвексног угла је специјалан случај општијих појмова за конвексни облик.

Један равнински геометријски облик F (подскуп тачака равни) назива се конвексан облик ако за сваке две тачке M и N из F , дуж MN у потпуности лежи у облику F , односно дуж MN је подскуп облика F .

Задатак 2

Објасни зошто праве, полуправе, дужи, раван, полураван су конвексни облици?

Задатак 3

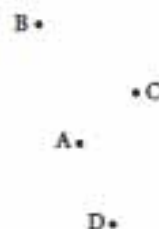
Какав угао формирају казаљке на сату ако:

- показују 3:00 часа?
- показују 10:10 часа?

Пример 4

Четворица од играча кошаркашког тима су постављена на терену као на цртежу. Помозите тренеру да одреди:

- Да ли је играч у тачки D у истој полуравни са играчем C у односу на праву која се формира од позиција играча A и B?
- Да ли се овим распоредом играча A, B и C формира конвексан или неконвексан угао са теменом у B која садржи тачку D?



Решење:

Направи цртеж у своју свеску према датим упутствима.

- Ако повучеш праву AB, очигледно је да тачке C и D леже са исте стране те праве, односно налазе се у истој полуравни.
- Ако нацрташ полуправе BA и BC, добијају се два угла са теменом у тачки B, таква да је један конвексан (то је угао чија је унутрашња тачка тачка D), а други је неконвексан (а за њега је тачка D спољашња тачка). Именуј сваки од тих углова.

Задатак 4

Три клупе у школском дворишту су постављене у теменима замишљеног троугла ABC.

- Да ли је клупа у тачки C у истој полуравни са клупом A у односу на праву која се формира од позиција клупа A и B?
- Да ли се овим распоредом клупа A, B и C формира конвексна или неконвексна 2Д форма?

Задатак 5

Башта је подељена стазом која иде од тачке P(2,1) до тачке Q(6,5). Цветна леја се налази у тачки R(4,3). Одговори на следећа питања:

- Којој од полуравнина одређених правом PQ припада тачка R?
- Да ли је угао $\angle PRQ$ конвексан или неконвексан?

Задатак 6

Направи свој дизајн баште. Постави стазе по свом избору које се секу под различитим угловима. Цртај на папиру или користи образовни софтвер да означиш углове између стаза. Класификуј добијене углове као конвексне или неконвексне.

Оцени свој одговор према следећим критеријумима:

- Идентификовани су сви углови.
- Тачно су класификовани као конвексни или неконвексни.
- Објашњено је зашто сваки угао припада одговарајућој категорији.

Зашто је важно да разликујеш конвексне од неконвексних углова у стварном животу? Који примери из свакодневног живота су ти највише помогли да разумеш полуравни и углове?

У своју свеску одговори са ДА или НЕ на следеће тврдње:

1. Могу да препознам и именујем углове и полуравни.
2. Разликујем оштар, прав, туп и раван угао.
3. Могу да класификујем углове као конвексне или неконвексне.
4. Могу правилно да нацртам и да означим углове и полуравни.
5. Успешно решавам задатке повезане са угловима и полуравнима.

Ако имаш више одговора „НЕ“, понови делове који ти нису јасни.

Самосталан рад

1. Град је подељен на два дела реком која пролази кроз њега. Река представља праву АВ, где је А(2,2), а В(6,2). Парк се налази у тачки С(4,4), а школа у тачки D(4,1).
 - а) Да ли се парк и школа налазе у истој полуравни одређеној правом АВ?
 - б) Које од тачака су са исте стране реке: Е(5,5), F(1,1) и G(3,7)?
2. У једном парку постоје три стазе које се секу у тачкама А(3,2), В(6,4) и С(5,6). Три стазе формирају троугао ABC.
 - а) Нацртај три стазе и обележи угао $\angle ABC$.
 - б) Да ли је угао $\angle ABC$, чија је тачка (5,4) унутрашња тачка, конвексан или неконвексан? Објасни зашто! Објасни зашто!
3. Двориште једне куће је подељено стазом која у координатном систему пролази кроз тачке А(1,5) и В(4,3). У дворишту се налазе: чесма у тачки F(3,5), цветњак у тачки G(2,1) и роштиљ у тачки H(4,7).
 - а) Нацртај праву АВ и обележи тачке F, G и H.
 - б) Које од тачака F, G и H су са исте стране од стазе?
 - в) Која од тачака је најудаљенија од стазе?
4. На спортском терену је постављен фудбалски гол са тачкама А(1,3) и В(5,3). Играч се налази у тачки С(4,6), а лопта у тачки D(2,5).
 - а) Нацртај праву АВ која представља гол и тачке С и D.
 - б) Да ли је угао $\angle ACD$ са спољашњом тачком В конвексан или неконвексан?
 - в) Која од тачака C(4,6) или D(2,5) је ближа правој АВ?

5. Нацртај стазу за трчање која дели парк на две полуравни. Стаза почиње од тачке $A(1,3)$ и иде до тачке $B(5,3)$. У парку је постављена уметничка скулптура у тачки $C(3,6)$. Одговори на следећа питања:
- У којој полуравни одређеној правом AB се налази тачка C ?
 - Да ли је угао $\angle ABC$, чији је координатни почетак унутрашња тачка, конвексан или неконвексан?

Мерење, процењивање и цртање углова

У свакодневном животу често се сусрећемо са ситуацијама где треба да проценимо величину угла. На пример, архитекте у свом послу морају тачно да одреде да ли је угао крова оштар, туп или неконвексан, како би се обезбедила стабилност и функционалност.

У овој лекцији ћеш научити:

- Како да разликујеш и измериш оштре, тупе и неконвексне углове до најближег степена.
- Како да процениш величине углова на најближу десетицу.
- Како да ова знања примениш у стварним ситуацијама.

Пример 1

У парку се планира изградња стаза које формирају углове око фонтане. Оне су постављене на следећи начин:

- Стазе AB и BC се секу у тачки B и формирају $\angle ABC$ од 50° .
- Стазе BC и CD се секу у тачки C и формирају $\angle BCD$ од 90° .
- Стазе CD и DA се секу у тачки D и формирају $\angle CDA$ од 120° .
- Стазе DA и AB се секу у тачки A и формирају $\angle DAB$ од 100° .

а) Одреди који углови су оштри, прави, тупи или неконвексни.

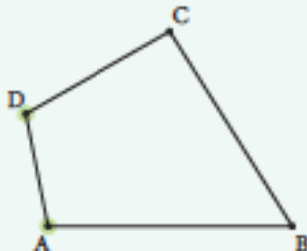
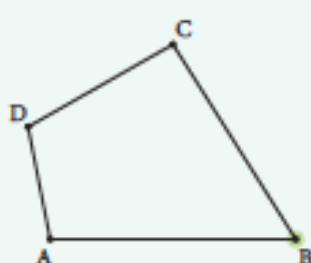
б) Нацртај план стаза и обележи углове.

в) Замисли да у парку треба да се поставе светла у сваком темену:

- Ако треба да се поставе светла само у теменима оштрих углова, на које тачке ћеш их поставити?
- Ако треба да се поставе светла на свим угловима већим од 90° , онда на које тачке ћеш их поставити?

Решење:

г)



Пример 2

Нацрт-план за дневни боравак једног стана предвиђа прецизно пројектовање, односно потребно је измерити и нацртати сваки угао између зидова до најближег степена.

Архитекта је одредио следеће углове:

- Угао између северног и источног зида износи 65° .
- Угао између јужног зида и пода је 120° .
- Угао између западног и јужног зида је 210° .

а) Нацртај ове углове у своју свеску помоћу угломера.

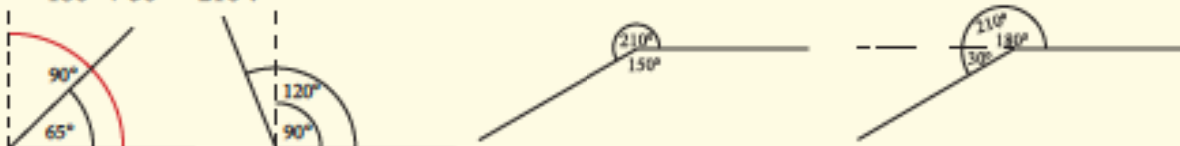
б) Одреди који је угао оштар, прав, туп и неконвексан.

в) Додатно објасни како угао од 90 степени може да се користи за проверу углова од 65° и 120° .

Решење:

а) Цртање углова:

За 210° коришћено је мерење допунског угла: $360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$ или као друга опција: $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$.



б) Класификација углова:

- 65° је оштар угао (мањи од 90°)
- 120° је туп угао (између 90° и 180°)
- 210° је неконвексан угао (већи од 180°)

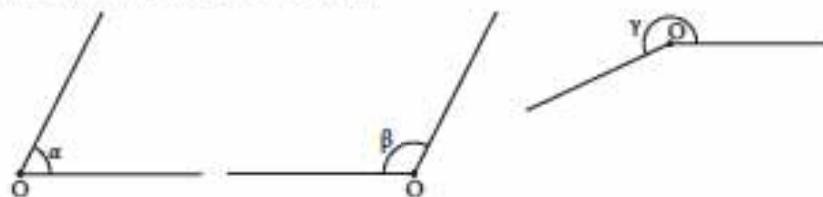
в) Провера углова помоћу 90° :

За угао од 65° , провери да је мањи од 90° ;

За 120° , додај 30° на 90° да потврдиш да је већи.

Пример 3

Архитекта Марко пројектује нову собу и нацртао је неколико углова између зидова. Потребно је да се процени величина ових углова на најближи степен изражен у целим десетицама како би се израдио тачан план.



а) Прецртај табелу у свеску:

Агол	Проценета големина на аголот	Големина на аголот со мерење со агломер
α		
β		
γ		

Процени величину сваког угла на најближи степен изражен у целим десетицама. Унеси проценену вредност за сваки угао.

б) Који од углова је оштар, туп или неконвексан?

в) Направи цртеже на којима ћеш приказати углове са процененим вредностима.

Процењивање углова

Да би проценио угао без угломера, користи визуелно поређење, на пример:

- Угао од 45° је половина правог угла (90°)
- Угао од 135° је туп угао, приближно на средини између 90° и 180°
- Неконвексни угао, на пример, угао од 240° има одговарајући кружни лук који чини готово целу кружницу, са малим делом који недостаје.

Решење:

а) Процена углова:

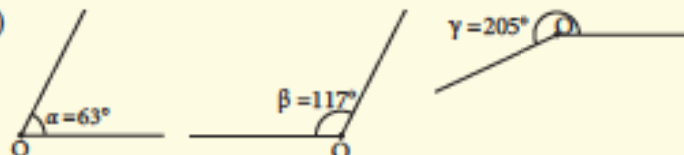
За α : приближно 60°

За β : приближно 120°

За γ : приближно 210°

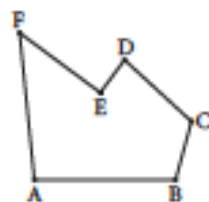
б) Први угао (60°) је оштар угао (мањи од 90°). Други угао (120°) је туп угао (између 90° и 180°). Трећи угао (210°) је неконвексан угао (већи од 180°)

в)



Задатак 1

Користи угломер да измериш један оштар, један туп и један неконвексан угао, а затим нацртај те углове у своју свеску.



Задатак 2

Процени величину сваког угла на најближи степен у целим десетицама. За сваки угао, запиши своју процену и упоређи је са стварном величином угла.



Задатак 3

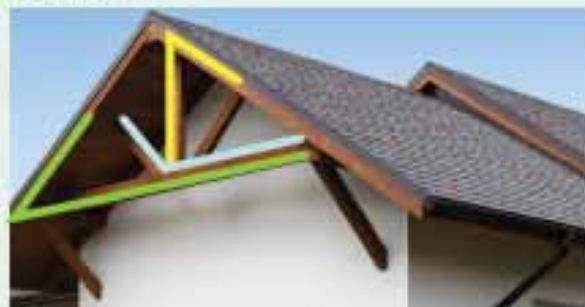
На основу слике процени углове. Да ли су приближно 30° , 90° или 150° ?



Пример 4

Нацртај једноставну скицу дела неког објекта (куће, крова, зграде...) са различитим угловима. Означи углове који су 60° , 120° и 180° .

Решење:



Задатак 4

Нацртај орнамент који ће садржати конвексне и неконвексне углове, а затим обој оштре углове црвеном бојом, тупе жутом и неконвексне углове љубичастом бојом. На крају измери по један угао од сваке врсте и запиши његову величину.



Задатак 5

Направи списак од пет предмета у свом дому (на пример, рамови, посуде, столови, прозори). За сваки предмет:

- Процени један угао.
- Измери угао угломером.
- Забележи колика је разлика између процене и мерења.

Како би објаснио пријатељу шта је неконвексан угао? Креирај скицу, на пример, моста или парка, где ћеш користити најмање три врсте углова (оштре, тупе и неконвексне). Објасни зашто си изабрао те углове. Направи процену, а затим провери тачност својих процена из претходног питања. Колико си био близу стварним мерењима?

Да би проценио своје знање, покушај да одговориш у својој свесци на следеће изазове:

Питање 1: Нацртај неколико углова и процени их без употребе угломера. Потом их измери и упореди своју процену са тачним вредностима. Колико си био близу?

Питање 2: Да ли троугао може бити неконвексна 2Д форма? Објасни зашто!

Питање 3: Ако је један угао 130° :

а) Колико му недостаје до 180° ?

б) Колико му недостаје до 360° ?

Питање 4: У којим свакодневним ситуацијама би могао/могла да користиш знање о мерама углова? Наведи бар три примера.

🚀 Ако си тачно одговорио на сва питања

💡 Ако си одговорио на 3–4 питања, настави да вежбаш!

✗ Ако си одговорио на 1–2 питања, врати се на лекцију и вежбај још мало!

Изазов: Покушај да осмислиш своју загонетку или задатак повезан са мерењем углова и подели је са другима!

Самосталан рад

1. Нацртај угао који је већи од 90° и мањи од 180° без угломера. Процени његову величину, запиши је. Затим измери угао угломером до најближег степена и напиши његову величину. Колика је разлика између величине угла и процене?

2.



Прецртај табелу у своју свеску и попуни је.

Угао	Процена	Мерење	Разлика између процене и мерења
Угао 1			
Угао 2			
Угао 3			

3. Нацртај угао од 50° и угао од 130° без угломера. Сваки угао измери. Колику грешку си направио приликом цртања без угломера?

Централни угао

Да ли си приметио да брзиномер на твом бициклу, сат на зиду или дизајн точка имају облике који укључују кругове и углове? У овој лекцији ћеш научити како да црташ, означаваш и користиш централне углове да решаваш различите проблеме.



Пример 1

Јана жели да направи украс за рођенданску забаву. Она ће користити кружни лук да направи занимљив украс на плафону своје собе.

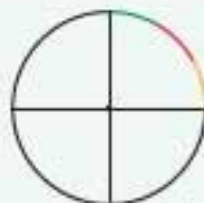
Дизајн украса:

- Јана има три траке: црвену, зелену и жуту.
- Она жели да свака трака покрива један део кружног лука који је $\frac{1}{4}$ од целе кружнице.
- Делови кружног лука покривени различитим тракама треба да буду једнаки.

- а) Колики део лука ће бити покривен са сваком од трака?
 б) Да ли ће неки део лука остати без траке?
 Ако је одговор да, колики је тај део?

Решење:

- а) Лук је $\frac{1}{4}$ целог круга. Јана има три траке (црвену, зелену и жуту) и свака од њих ће покривати једнаку дужину кружног лука. Пошто имамо три траке, свака трака ће покривати $\frac{1}{3}$ лука.
 б) Ако свака трака покрива $\frac{1}{3}$ кружног лука (посматраш га као једну целину), а има три траке, онда ће те три траке заједно покривати $\frac{3}{3}$, односно цео кружни лук. Дакле, цео кружни лук биће покривен тракама и неће остати празан део.



Пример 2

Марко и Ана раде заједно на једном пројекту. Они желе да направе занимљив цртеж на једном зиду у својој школи користећи кружницу и неколико правих линија које се секу у њеном центру. При томе кружницу деле на три једнака дела и сваки део боје различитом бојом. Марко и Ана радили су по следећим корацима:

- Марко је нацртао кружницу са центром у тачки О.
 - Ана је повезала тачку О са тачком А на кружници.
 - Марко је поставио угломер у центар О кружнице и на полуправу коју је Ана нацртала и измерио угао од 120° . Зашто? Потом је повукао други крак угла и пресек са кружницом означио са В. Између тачака А и В на кружници означио је тачку М.
 - Ана, почевши од крака ОВ угла АОВ, угломером је измерила угао од 120° и повукла други крак другог угла. Пресек другог крака другог угла са кружницом означила је са С. Између В и С изабрала је тачку N.
 - Између тачака С и А на кружници Марко је изабрао тачку Р.
- а) Према корацима које су пратили Марко и Ана, цртај у својој свесци.
 б) Да ли је кружница подељена на три дела?
 в) Именуј добијене лукове!
 г) Запиши сваки угао чији је теме у центру кружнице и који одговара једном од кружних лукова $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$, $\widehat{CPA}$.
 д) Прецртај табелу у свеску и попуни је.

Кружни лук	Централни угао	Тетива

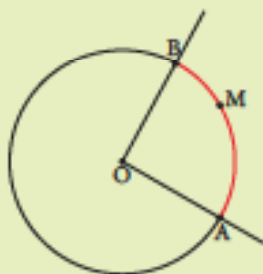
Решење:

- а) Цртеж који су добили Марко и Ана дат је на цртежу.
- б) Кругница је подељена на три једнака дела. Објасни зашто.
- в) Добијени су лукови $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$, $\widehat{CPA}$.
- г) $\angle AOB$ са теменом у центру кругнице и његовим крацима одсеца лук $\widehat{AMB}$,
 $\angle BOC$ са теменом у центру кругнице и његовим крацима одсеца лук $\widehat{BNC}$,
 $\angle COA$ са теменом у центру кругнице и његовим крацима одсеца лук $\widehat{CPA}$.



Угао чије је теме центар O кругнице, који одсеца лук AMB те кругнице, назива се централни угао над луком AMB .

Сваки лук на кругници одређује јединствен централни угао изнад тог лука.



- д) Према примеру, допуни табелу у својој свесци.

Кругни лук	Централни угао	Тетива
	$\angle AOB$	AB
	$\angle BOC$	
	$\angle AOC$	

Сваки централни угао у једној кругници одређује јединствену тетиву те кругнице.

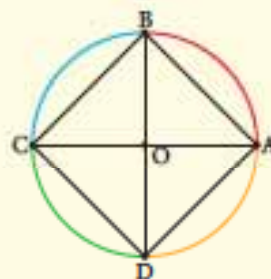
Пример 3

Група ученика желела је да уреди школско двориште цветном гредицом подељеном на 4 једнака дела. Да би им помогао, прати следеће кораке:

- Нацртај кружницу и подели је на четвртине. Шта запажаš у вези са деловима? Какав централни угао је формиран изнад сваког од четири лука?
- Повежи суседне тачке кружнице тетивама. Колико тетива можеш да нацрташ? Да ли се на свакој тетиви формира угао у центру? Какав угао је то?
- Изабери једну тетиву и посматрај кружницу. На колико делова тетива дели кружницу? Да ли свака тетива одређује један централни угао? Опиши те углове. Да ли тетива одговара сваком од два кружна лука? Како можеш да потврдиш ту везу?
- Можеш ли да закључиш шта одређује сваки централни угао у кружници? Како је тетива повезана са централним угловима које одређује? Како можеш да докажеш да сваки централни угао одређује јединствен кружни лук?

Решење:

- Сваки део кружнице је једнак јер је кружница подељена на четири једнака лука. Сваки централни угао изнад једног лука износи 90° , јер је цео угао кружнице (360°) подељен на четири једнака дела.
- Може се нацртати четири тетиве које повезују суседне тачке на кружници. Свака тетива формира централни угао у центру кружнице.
- Једна тетива дели кружницу на два лука – један већи и један мањи. Да, свака тетива одређује два централна угла. Један централни угао је изнад већег лука, а други је изнад мањег лука. Тетива лежи у једном од та два угла. То се може потврдити тако што се измери угао који одговара мањем кружном луку изнад те тетиве, односно конвексни угао. Преостали део кружнице, тј. већи кружни лук, одговара неконвексном углу који износи: 360° – конвексни угао.
- Сваки лук једне кружнице одређује јединствен централни угао изнад тог лука.



Тетива повезује крајње тачке лука, а централни углови се формирају на основу тих крајњих тачака и центра кружнице.

Сваки централни угао у кружници одређује јединствену тетиву те кружнице.

Задатак 1

Са тачкама М и Н кружница је подељена на два кружна лука, од којих је један 7 пута дужи од другог. Одреди централни угао који одговара краћем кружном луку.

Задатак 2

Једна кружница је са тачкама П и К подељена на два дела, од којих један чини $\frac{4}{9}$ од кружнице. Одреди централни угао који одговара кружном луку са већом дужином.

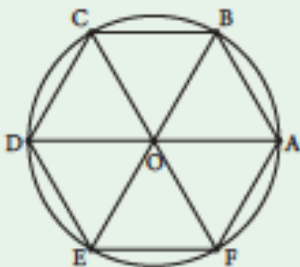
Пример 4

У градском парку планирају да направе кружну цветну леју. Радници су одлучили да поделе кружницу на шест једнаких делова како би посадили различите врсте цвећа.

- Нацртај кружницу и обележи тачке А, В, С, D, Е, F којима је кружница подељена на шест једнаких делова.
- Нацртај централне углове који одговарају сваком од шест делова. Колики је сваки централни угао?
- Ако су тетиве које повезују суседне тачке кружнице једнаке, да ли су кружни лукови које оне обухватају једнаки? Објасни.

Решење:

Користи цртеж и одговори на питања.

**Задатак 3**

Колики део кружнице одговара централном углу од:

- а) 120° б) 90° в) 240° г) 270° д) 40°

Како су централни углови, тетиве и кружни лукови повезани у кружници и како нам та повезаност може помоћи да решимо проблеме у свакодневном животу?

Ако су дате две кружнице са различитим радијусима, да ли централни углови од 90° обухватају исте дужине кружних лукова? Објасни зашто.

Одговори на питања у својој свесци. Подели одговоре са својим школским друговима.

- Шта сам данас научио што ми је било најзанимљивије или најкорисније?
- Да ли постоје ситуације у стварном животу у којима сам приметио или бих могао да применим овакве геометријске концепте?
- Да ли могу да нацртам централни угао помоћу угломера?
- Да ли могу да објасним како су кружни лукови и тетиве повезани са централним угловима?
- Шта бих урадио другачије ако поново решавам неки од задатака у овој лекцији?

Самосталан рад

1. Нацртај кружницу која ће представљати сат.
 - а) Подели кружницу на 12 једнаких делова (часова).
 - б) Колики централни угао обухвата сваки од означених кружних лукова?
 - в) Ако обележиш три узастопна часа (на пример, од 12 до 3), колики је централни угао над та три часа?
 - г) Колики централни угао описује велика казаљка на сату за време од 1, 2 или 5 минута?
2. У цветној башти кружна леја је подељена на 8 једнаких делова како би се засадили различите врсте цвећа.
 - а) Нацртај кружницу и подели је на 8 једнаких делова.
 - б) Колики централни угао одговара једном делу леје?
 - в) Колики централни угао обухватају заједно, два узастопна дела?
 - г) Колико делова је потребно да се формира централни угао од 270° ?
3. У свакој кружници је дат централни угао изнад једног лука:



- а) Колики централни угао недостаје да покрије целу кружницу у свакој од кружница?
- б) Колико једнаких делова бисмо добили ако кружницу поделимо према датим угловима?

4. На спортској стази кружни пут је подељен на 9 једнаких делова за вежбање.
 - а) Нацртај кружницу и подели је на 9 једнаких делова.
 - б) Колики централни угао одговара једном од датих делова?
 - в) Ако тркач пређе два дела, колики централни угао је одређен његовом стазом?
 - г) Ако тркач пређе половину стазе, колико делова је прешао?
5. Кружна чинија је украшена са 5 једнаких шара по њеној ивици.
 - а) Нацртај кружницу и подели је на 5 једнаких делова.
 - б) Колики је централни угао сваке шаре?
 - в) Ако се два дела споје у једну шару, колики ће бити нови централни угао?

Операције са угловима

Замисли да уређујеш простор у дому или у башти. Да би то урадио, можда ћеш морати да измериш или израчунаш углове, да их сабереш или одузмеш како би добио тачне резултате. У овој лекцији ћеш научити како правилно да изводиш операције са угловима, како да претвараш мање мере углова и како да примениш те вештине у свакодневном животу.



Пример 1

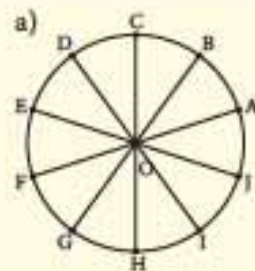
Нацртана је кружница која представља воденично коло. Коло је подељено на 10 једнаких делова са одговарајућим радијусима који се спајају у центру кола. На свакој од десет тачки где радијус сече кружницу је закачена једна лопатица.

- а) Нацртај кружницу и означи радијусе који деле кружницу на 10 једнаких делова.
- б) Колики је централни угао који одговара кружном луку између две лопатице?
- в) Колики централни угао формирају заједно два суседна кружна лука?

Решење:

б) $360^\circ : 10 = 36^\circ$. Угао између две лопатице је 36° .

- в) Ако желимо да одредимо колики централни угао секу два суседна кружна лука заједно, тај централни угао је $36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$.
Значи, централни угао је 72° .



Задатак 1

На кружници су дата два централна угла α и β , тако да је $\alpha = \beta$.

- а) Шта можеш да закључиш о тетивама које одсецају те углове?
б) Шта можеш да закључиш о кружним луковима које одсецају ти углови?
(Нацртај кружницу, означи централне углове и тетиве и покушај да их упоредиш!)

За прецизнија мерења и одређивање величине угла, поред степена се користе и следеће мере: $1'$ (1 минута) и $1''$ (1 секунда).

Један степен има 60 минута, а 1 минута има 60 секунди.

То значи $1^\circ = 60' = 3\,600''$

Пример 2

У физкултурној сали наставник је поставио 3 траке на поду које се секу у једној тачки, формирајући различите углове који заједно формирају пуни угао. Захтеви за ученике су:

- а) Користи угломер да измериш сваки од углова између трака и запиши резултате у степенима.
б) Ако један степен има 60 минута, колико минута има угао од x° (нпр. 30°)?
в) Ако угао није цео број, како да претвориш остатак из степена у минуте?
г) Ако један минут има 60 секунди, колико секунди има угао од y' (нпр. $15'$)?
д) Ако угао садржи и минуте и секунде, како се читава вредност претвара у секунде?
ђ) Ако угао између трака износи $45,5^\circ$, како ће се изразити у минутима и секундама?
е) Провери да ли сви измерени углови дају збир од 360° . Објасни зашто је та провера потребна.

Решење:

а) На пример: Углови између трака су измерени као 45° , 90° и $224,5^\circ$.

б) Претварање степени у минуте: За $45^\circ = 45 \cdot 60' = 2\,700'$

в) На пример, за $45,5^\circ$: из б) $45^\circ = 2\,700'$,

Остатак, односно децимални део $0,5^\circ$ се претвара у минуте: $0,5^\circ \cdot 60' = 30'$.

Значи, $45,5^\circ = 45^\circ 30'$, односно у минутама укупно $2\,700' + 30' = 2\,730'$.

г) Претварање минута у секунде: На пример за $30' = 30' \cdot 60'' = 1\,800''$.

д) Значи, $45,5^\circ = 45^\circ 30' 0''$

ђ) $224,5^\circ = 224^\circ 30' 0''$.

е) Збир углова: $45,5^\circ + 90^\circ + 224,5^\circ = 360^\circ$. Добијен је потврђен одговор, збир углова је тачан јер сва три угла, како су од почетка одређени, треба да формирају пун угао.

Пример 3

Једна група ученика жели да креира нову школску заставу. Одлучили су да на застави буду нацртана два троугла различитих боја. Троуглови имају углове $65^\circ 20'$ и $72^\circ 40'$. Израчунај трећи угао.

Решење:

Сабирање прва два угла: $65^\circ 20' + 72^\circ 40' = (65^\circ + 72^\circ) + (20' + 40')$.

Сабери степене:

$$65^\circ + 72^\circ = 137^\circ.$$

$60'$ је 1° : Значи $137^\circ + 1^\circ = 138^\circ$.

Сабери минуте:

$$20' + 40' = 60'.$$

Израчунавање трећег угла:

Одузми збир прва два угла од 180° : $180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$.

Провера: Збир три угла је: $65^\circ 20' + 72^\circ 40' + 42^\circ = 180^\circ$.

Пример 4

Дати су углови $\alpha = 103^\circ 17' 34''$ и $\beta = 48^\circ 46' 38''$. Израчунај:

а) $\alpha + \beta$ б) $\alpha - \beta$

Решење:

а) $103^\circ 17' 34''$

$$+ 48^\circ 46' 38''$$

$$\hline 151^\circ 63' 72''$$

$$\hline 151^\circ 64' 12''$$

$$\hline 152^\circ 4' 12''$$

Слично као и при сабирању неименованих бројева, и овде се операције врше почевши с десна на лево. У добијеном збиру треба да направимо поправке користећи везе између мерних јединица за угао:

Добили смо: $\alpha + \beta = 151^\circ 63' 72'' = 152^\circ 4' 12''$

$$\begin{array}{r} \text{б) } 103^\circ 17' 34'' \\ - 48^\circ 46' 38'' \\ \hline \end{array}$$

Пошто од $34''$ треба да одузмемо $38''$, од $17'$ узимамо $1' = 60''$ и код секунди добијамо: $34'' + 60'' = 94''$. Слично код минута: сада од $16'$ треба да одузмемо $46'$, па узимамо $1^\circ = 60'$ од 103° , и код минута добијамо: $16' + 60' = 76'$, а код степени остаје 102° . Тада ће разлика бити израчуната на следећи начин:

$$\begin{array}{r} 102^\circ 76' 94'' \\ 103^\circ 17' 34'' \\ - 48^\circ 46' 38'' \\ \hline 54^\circ 30' 56'' \end{array}$$

Конечно се добива $\alpha - \beta = 54^\circ 30' 56''$.

Задатак 2

Израчунај: а) $25^\circ 40' 30'' + 30^\circ 25' 45''$ б) $22^\circ 35' 50'' - 18^\circ 20' 55''$

Пример 5

Инжењери који креирају соларне панеле треба да одреде углове за оптимално постављање панела да би искористили сунчеву светлост. Један панел се поставља под углом од $47^\circ 30'$, а други панел треба да буде постављен тако да укупан угао између панела буде $110^\circ 15'$.

- а) Колики је угао другог панела?
б) Ако други панел треба додатно да се наклони за $5^\circ 20'$, колики ће бити нови угао другог панела?

Решење:

- а) Израчунавање угла другог панела: Укупан угао између два панела је $110^\circ 15'$. Први панел се поставља под углом од $47^\circ 30'$. Одузимамо угао првог панела од укупног угла: $110^\circ 15' - 47^\circ 30' = 62^\circ 45'$ (угао другог панела)
б) Израчунавање новог угла другог панела: Други панел се додатно наклања за $5^\circ 20'$.
Саберимо почетни угао другог панела са овом променом: $62^\circ 45' + 5^\circ 20' = 68^\circ 5'$ (нов угао другог панела).

Задатак 3

Инжењери који раде на дизајну новог кровног система за фабрику треба да одреде углове делова крова како би се обезбедила максимална стабилност и ефикасност. Један од главних елемената конструкције је носећа греда која формира угао од $48^\circ 45'$ са основом крова. Да би се избегло непотребно оптерећење структуре, друга греда треба да формира угао од $120^\circ 30'$ са носећом гредом.

- а) Колики је угао између друге греде и основе крова?
Како ћеш израчунати тај угао ако знаш да збир трију углова који се формирају између носећих греда и основе крова треба да буде 180° ?



- б) Ако друга греда треба да буде постављена према носећој греди под углом који је за $5^\circ 15'$ већи од претходно задатог угла, колики ће бити нови угао између друге греде и основе крова? Како ћеш проверити тачност промене угла?

Како ће промена углова у конструкцији крова утицати на стабилност целе структуре? Шта би се десило ако се углови превише повећају или смање и како би се та ситуација решавала приликом пројектовања других архитектонских елемената? Истражуј!

Одговори на питања у своју свеску. Одговор на свако питање потврди својим примером.

- Да ли могу правилно да претварам углове из већих у мање мере и обрнуто?
- Да ли могу да сабирам и одузимах углове?
- Да ли могу да применим ове операције у свакодневним ситуацијама?

Самосталан рад

- Израчунај $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ ако:
 - $\alpha = 82^\circ 17'$, $\beta = 53^\circ 37' 46''$, б) $\alpha = 183^\circ 15' 47''$, $\beta = 98^\circ 4' 52''$
 - $\alpha = 205^\circ$, $\beta = 118^\circ 53' 26''$
- Крећући се путем, аутомобил мора да прође три закривљења. На првом закривљењу одговара угао од $35^\circ 45' 30''$, на другом закривљењу угао од $72^\circ 10' 15''$, а на трећем закривљењу угао од $58^\circ 25' 45''$.
 - Израчунај укупан угао закривљења који је направио аутомобил.
 - Ако аутомобил треба да направи додатно закривљење са углом од $12^\circ 50' 30''$, колики ће бити нови укупан угао?
- Дати су углови $\alpha = 103^\circ 16' 33''$ и $\beta = 61^\circ 47' 37''$. Израчунај: а) $\alpha + \beta$ б) $\alpha - \beta$
- Нека је $\alpha = 79^\circ 57' 43''$, $\beta = 180^\circ$, $\gamma = 27^\circ 19'$. Израчунај: а) $\alpha + \beta + \gamma$ б) $\beta - \gamma$
- Одреди угао α ако је $\beta + \gamma = 111^\circ 43'$ и $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
- Угао $\alpha = 2 \cdot \beta$, $\beta = 35^\circ 35'$ и $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Колики су углови α и γ ?

Графичко сабирање и одузимање углова

У архитектури, дизајну, па чак и у свакодневном животу, често је потребно да конструишемо углове са прецизношћу. На пример, при изради намештаја или дизајнирању објеката, можемо се суочити са потребом да креирамо тачан угао једнак неком већ постојећем. У овој лекцији ћеш научити како да конструишеш угао једнак датом углу користећи шестар и лењир, и како то да примениш у сабирању и одузимању углова са геометријским прибором при решавању задатака.



Пример 1

У свесци нацртај угао који је једнак углу α датом на цртежу. Како би то урадио?



Пример 2

Графичко преношење угла једнаког датом углу

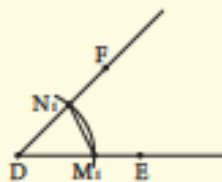
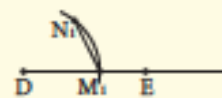
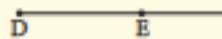
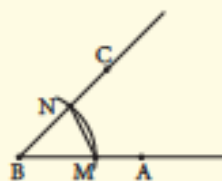
Решење:

Следи кораке и цртај у својој свесци:

- Нацртај $\angle ABC$
- Нацртај полуправу DE
- Постави иглу шестара у теме угла $\angle ABC$ и нацртај лук који сече краке угла у тачкама M и N
- Са истим отварањем шестара нацртај кружни лук са центром у тачки D . Пресек лука са полуправом DE означи са M'
- Измери дужину тетиве која одговара кружном луку који си нацртао код $\angle ABC$, односно дужину MN .
- Са истим отварањем шестара пренеси ту дужину стављајући иглу у тачку M' . Пресек два лука означи са N'
- Повуци други крак траженог угла, односно DN' (F јетачка на полуправи DN'). Добијени угао $\angle EDF$ је једнак углу $\angle ABC$

Покушај да одговориш на следеће питање:

Које својство централног угла се користи при поступку графичког преношења угла?



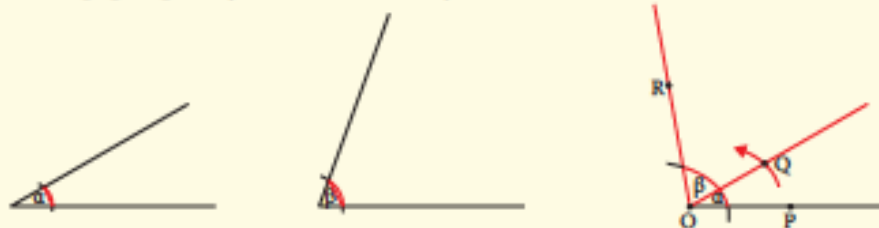
Пример 3

Нацртај два угла α и β у својој свесци. Затим прати кораке да их графички сабереш — углове α и β .

Решење:

Кораци:

- Конструирајући угао $\angle POQ$ једнак углу α , по корацима из примера 2.
- Други крак угла $\angle POQ$, OQ , биће први крак за угао који ћеш конструисати једнак углу β , чије ће теме такође бити тачка O .
- Други крак угла једнаког углу β нека буде означен као OR .
- Новоформирани угао $\angle POR = \alpha + \beta$



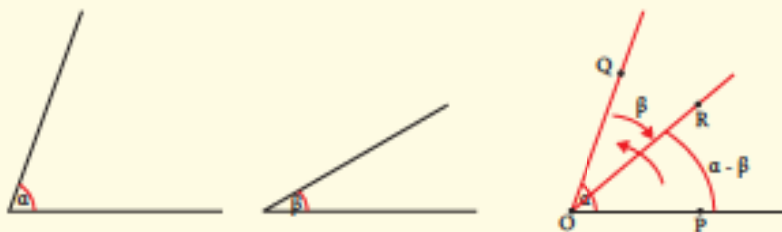
Пример 4

Нацртај два угла α и β , где је $\alpha > \beta$, у својој свесци. Затим прати кораке да одузмеш угао β од α користећи шестар.

Решење:

Кораци:

- Најпре, по корацима из примера 2, правимо графичко преношење угла α (у смеру супротном од казаљке на сату).
- Добијени угао који је једнак α означавамо као $\angle POQ$.
- Графички преносимо угао β , тако да ако за почетни крак узмемо OQ , у смеру казаљке на сату преносимо β , односно $\beta = \angle QOR$.
- Угао одређен крацима OR и OP , односно $\angle POR = \alpha - \beta$



Задатак 1

Нацртај угао $\alpha = 35^\circ$ и угао $\beta = 105^\circ$. Конструирај угао: $\gamma = \alpha + \beta$ и угао $\delta = \beta - \alpha$.

Пример 5

Један капетан управља малим бродом и треба да води брод кроз канал. Зато треба да направи два скретања. Прво, треба да скрене за угао од 65° надесно, а затим за угао од 40° налево. На крају пута капетан жели да провери тачан смер брода у односу на почетни смер. Колики је коначан угао скретања?

Решење:

Према услову задатка прво скретање је 65° надесно, а друго скретање је 40° налево.

Коначан угао скретања ће се добити одузимањем углова. Објасни зашто?

Пресметавањем добијамо: $65^\circ - 40^\circ = 25^\circ$

Значи, коначан угао скретања је 25° надесно у односу на почетни смер.

Графичко решење:

- Нацртај угао од 65° и угао од 40° .
- Повуци праву АВ која представља почетни смер брода. Изабери тачку О на правој АВ.
- Пренеси угао од 65° , са теменом у О, десно од праве АВ и означи га као $\angle XOY$.
- Пренеси други угао од 40° лево, почев од крака ОУ.
- Нацртај полуправу ОZ.
- Измери угао између почетног смера АВ (ОХ) и коначног смера брода ОZ.
- Тај угао је 25° , што значи да је брод је после два свртања на 25° надесно у односу на почетни смер

Задатак 2

Један саобраћајни инжењер уређује тротоар са стазама које се укрштају. Једна стаза са тротоаром заузима угао од 75° , а друга стаза треба да се постави под неки угао тако да заједно са првом стазом формирају прав угао. Инжењер жели да сазна:

- а) Под којим углом треба да се постави стаза да би се формирао прав угао?
- б) Касније, ако треба да се дода део са још једним углом од 30° , колики ће бити укупан угао?

Замисли да планираш баштенску стазу у облику троугла са једним углом од 90° , а остала два угла треба да буду једнаки. Како ћеш конструисати те углове да стаза изгледа правилно?

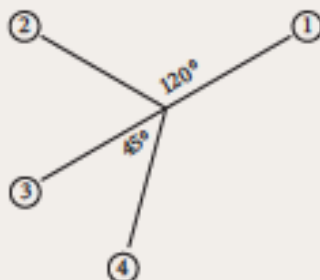
Одговори на питања у својој свесци: Ако за одговор на неко питање ниси сигуран, поново погледај пример из лекције који се односи на питање.

- Да ли могу да конструишем угао једнак датом углу?
- Да ли могу да конструишем збир и разлику два угла?
- Да ли могу да применим те вештине за решавање задатака из стварног живота?

Самосталан рад

Пронађи графичка решења.

- Један инжењер дизајнира саобраћајну раскрсницу са четири пута који се укрштају у једној тачки као на слици. Први са другим путем захвата угао од 120° , а трећи са четвртим 45° .
 - Конструиши угао који захватају други са трећим путем, ако први и трећи пут формирају прав угао.
 - Касније, додаје четврти пут који са трећим захвата угао од 45° . Конструиши збир трију углова.
 - Конструиши угао који ће захватити први и четврти пут.
- Један столар израђује рам за сто у облику троугла. Један угао рама је 88° . Уз конструкцију одговори на питања:
 - Колико износи збир друга два угла?
 - Ако је један од њих 62° , колико износи трећи угао?
- Један техничар поставља соларне панеле на кров. Панели треба да буду нагнута под углом од 35° у односу на хоризонталу. Касније, техничар открива да треба да повећа нагиб за додатних 12° ради оптималне изложености сунцу. Уз конструкцију одговори на питања:
 - Колики ће бити коначан угао нагиба?
 - Ако жели да врати 8° уназад од прилагођеног угла, колики ће бити коначан угао?
- Вера у дворишту свог дома прави цветну леју која има облик четвороугла. Први угао цветне леје износи 110° , други угао је 95° , а трећи угао треба да буде 85° .
 - Уз конструкцију одреди колико износи четврти угао, знајући да је збир свих углова у четвороуглу 360° ?
 - Ако Вера одлучи да смањи трећи угао за 10° , како ће то утицати на четврти угао?
- Конструиши угао као разлику углова 150° и 60° .
- Дати су углови: $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 87^\circ$ и $\gamma = 35^\circ$. Конструиши угао:
 - $\alpha + \beta - \gamma$
 - $\alpha - \beta + \gamma$
- Нацртај један туп угао и један оштар угао. Уз конструкцију одреди њихову разлику.



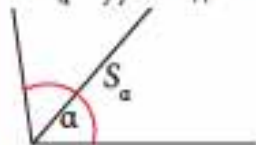
Конструкција симетрале угла и углова од 60° , 30° , 15° , 90° , 45°

Углови од 60° , 30° , 15° , 90° и 45° су веома често присутни у различитим дисциплинама као што су архитектура, дизајн, инжењерство и свакодневне активности. Они су важни за стварање прецизних и правилних објеката, а такође се користе и за решавање математичких и геометријских задатака. У овој лекцији ћеш научити како да конструкцијом добијеш ове углове користећи једноставне алатке као што су шестар и лењир.



Пример 1

Нацртај угао од 98° . Уз угаоник и лењир, нацртај симетралу тог угла.



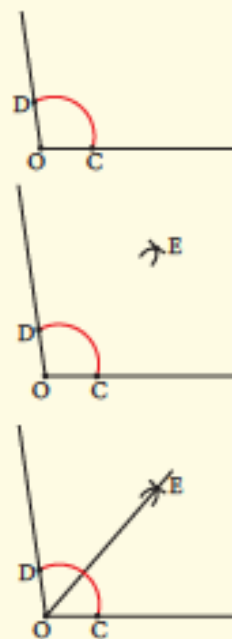
Пример 2

Конструиши симетралу угла од 108° .

Решење:

Прати кораке и цртај у својој свесци:

- Кораци за конструкцију симетрале угла од 108° помоћу шестара:
- Уз помоћ угаоника нацртај угао од 108° . Означи теме угла са O .
- Постави врх шестара у тачку O (теме угла).
- Са произвољним радијусом (отвор шестара), нацртај лук који сече краке угла у тачкама C и D .
- Постави врх шестара у тачку C , подеси радијус тако да буде нешто већи од половине растојања између C и D .
- Нацртај лук унутар угла.
- Без мењања радијуса, постави врх шестара у тачку D и нацртај други лук који се сече са првим луком.
- Обележи тачку пресека тих лукова као E .
- Уз помоћ лењира повежи тачке O и E . Полуправа OE је симетрала угла од 108° .
- Уз угаоник измери оба угла које је формирала симетрала OE са крацима угла (OA и OB). Оба угла треба да буду једнака, по 54° .



Задатак 1

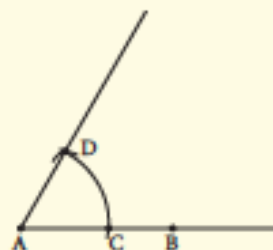
Нацртај угао од 180° . Конструирај симетралу тог угла. Колико степени има сваки угао који се формира симетралом?

Пример 2

Конструкција угла од 60° .

Решење:

- Цртај у својој свесци пратећи ове кораке за конструкцију угла од 60° помоћу шестара:
- Помоћу лењира нацртај полуправу АВ.
- Постави врх шестара у тачку А.
- Изабери произвољан радијус (не превише велики) и нацртај лук који сече полуправу АВ. Обележи тачку пресека као С.
- Без промене радијуса шестара, постави врх шестара у тачку С.
- Нацртај нов лук који сече претходни лук. Обележи тачку њиховог пресека као D.



Помоћу лењира нацртај полуправу AD. Ова полу права је други крак угла.

Угао $\angle BAD$ који формирају краци АВ и AD је угао од 60° .

Да ли би могао да објасниш зашто је при овој конструкцији добијени угао тачно 60° ?

Задатак 2

Искористи своје знање о конструкцији угла од 60° и симетрале да конструираш: угао од 30° и угао од 15° .

Пример 3

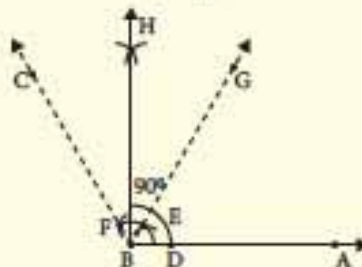
Конструирај угао од 90° .

Решење:

Кораци за конструкцију угла од 90° помоћу шестара:

- Помоћу лењира нацртај полуправу ВА. Тачка В ће бити теме угла који се конструираше.
- Постави врх шестара у тачку В и изабери произвољан радијус.
- Помоћу шестара нацртај лук са центром у В који сече полуправу ВА у тачки D.
- Без промене радијуса, постави врх шестара у тачку D и нацртај лук који сече први лук у тачки E.
- Са истим радијусом, постави врх шестара у тачку E и нацртај нови лук који поново сече први лук у тачки F.

- Са лењиром повежи тачку В са тачком Е, а затим тачку В са тачком F.
 - $\angle ABF$ је угао од 120° . Објасни!
- Који је последњи корак да добијеш угао од 90° (односно $\angle ABH$)? Да би одговорио на ово питање, подсети се на конструкцију симетрале угла.

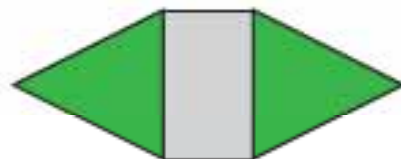


Задатак 3

Искористи конструкцију угла од 90° да конструишеш угао од 45° .

Пример 4

Матео је ученик који жели да дизајнира рам за слику који ће направити у школској радионици. Рам треба да има два типа углова: углове од 90° за рам и углове од 60° за декоративне елементе рама, као на цртежу.



Решење:

Матео има шестар и лењир. Користи кораке за конструкцију углова од 90° и 60° да помогнеш Матеоу да изради углове на раму. Кораци:

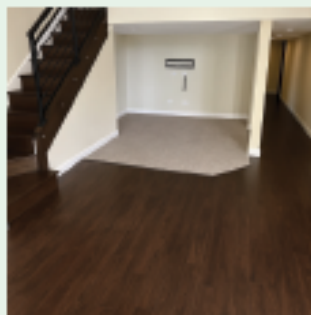
- Користећи шестар и лењир Матео ће конструисати четири угла од 90° да би формирао правоугаони рам.
- За декоративне углове, Матео ће користити кораке за конструкцију угла од 60° , путем формирања једнакостраничног троугла (сви углови у овом троуглу су по 60°).
- Матео ће поставити углове од 60° на две паралелне стране рама.
- Матео ће проверити да ли су углови прецизно формирани користећи угломер да измери углове и да се увери да рам има тачне углове од 90° и декоративне делове са угловима од 60° .

Задатак 4

Дата је права и тачка А на њој. Са теменом у тачки А, конструиши угао који представља збир углова од 45° и 30° користећи кораке за конструкцију сваког од углова.

- Колики је угао који се добио?
- Колики је угао који је напоредан са добијеним?

Како тачно разумевање и примена метода за конструкцију специфичних углова може да утиче на решавање геометријских проблема и на свакодневно коришћење геометријских принципа? Користи слике да одговориш на питање.

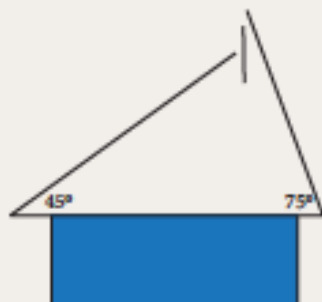


Одговори на питања у својој свесци. За конструкцију неких углова ако имаш потребу, врати се на примере из лекције.

- Да ли могу да конструишем углове од 30° , 45° , 60° , 90° и 15° ?
- Да ли могу да применим ове углове у различитим практичним ситуацијама?
- Да ли правилно користим алате (шестар и лењир) за конструисање тачних углова?

Самосталан рад

- 1.* Конструиши угао од 60° , а затим само са шестаром и лењиром подели га на два дела, тако да један буде 3 пута већи од другог.
2. Пројекат за изградњу крова куће предвиђа нагиб од 75° у односу на хоризонталну раван, а са друге стране нагиб од 45° . Представи оба угла конструкцијом. У прилогу је дата скица изгледа крова гледано са стране.



3. Конструйши угао од:

- а) 150° б) 135° в) 210° г) $37^\circ 30'$

4. Изградња саобраћајног решења за велики надвожњак захтева конструкцију углова од 105° и 45° . Уради то у својој свесци и запиши кораке конструкције.



5. Технологија и софтверски алати су одлични савезници у настави јер нуде динамичне алтернативе традиционалном ручном цртању.

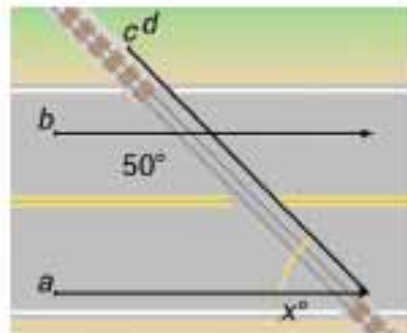
Софтвери као GeoGebra, Geometer's Sketchpad и други слични алати омогућавају динамичну интеракцију са геометријским објектима и чине математику разумљивијом и ближом стварном животу.

Задатак:

Истражуј уз неки геометријски софтвер цртање углова са датом величином и одређивање њихових симетрала. Различите апликације нуде различите алате и могућности, али у сваком случају обезбеђују брз, занимљив и интерактиван приступ при решавању математичких проблема.

Трансверзале и паралелне праве

У овој лекцији ћеш истраживати трансверзале и паралелне праве, два важна појма у геометрији који имају широку примену у свакодневном животу, као што су путни или инжењерски планови. Кроз разумевање углова који се формирају на трансверзали и паралелним правима, упознаћеш се са проблемима који се решавају при пројектовању и изградњи различитих структура.



Пример 1

Андреа и Петар играју игру на плажи. Андреа је нацртала две линије у песку које се секу једна с другом. Петар има задатак да одреди који углови су суседни, напоредни и накрсни.

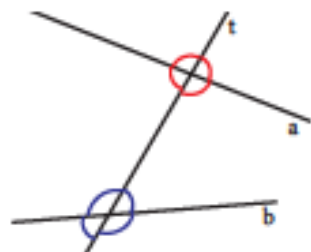
Решење:

- У овом случају углови $\angle 1$ и $\angle 2$ су суседни углови. Објасни зашто.
- Напоредни углови су, такође, $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$, $\angle 3$ и $\angle 2$, $\angle 1$ и $\angle 4$. Објасни зашто.
- Накрсни углови су $\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 4$ и $\angle 2$. Објасни зашто.



Пример 2

- Објасни цртеж.
- Колико углова је формирано?
- Истражи углове које формирају права t и праве a и b .



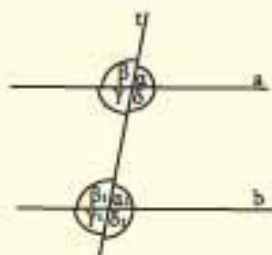
Решење:

- Трансверзала је права која сече две или више правих у различитим тачкама. При том сечењу се формирају различите врсте углова.
- Са трансверзалом је формирано 8 углова, по четири са сваком од правих.



в) Врсте углова који се формирају од трансверзале:

- Унутрашњи углови: углови који се налазе између правих и трансверзале. Који су то углови?
- Спољашњи углови: углови који се налазе ван правих, на страни супротној од унутрашњих углова. Који су то углови?



Сагласни углови називамо оне парове углова који:

- немају заједничко теме
- леже на истој страни од трансверзале
- један је унутрашњи, а други спољашњи угао.

У нашем примеру, **сагласни углови** су следећи парови углова: α и α_1 ; β и β_1 ; γ и γ_1 ; δ и δ_1 .

Наизменични углови називамо оне парове углова који:

- немају заједничко теме
- леже на истој страни од трансверзале
- један је унутрашњи, а други спољашњи угао.

У нашем примеру, **наизменични углови** су следећи парови углова: α и γ_1 ; β и δ_1 ; δ и β_1 ; γ и α_1

Супротни углови називамо оне парове углова који:

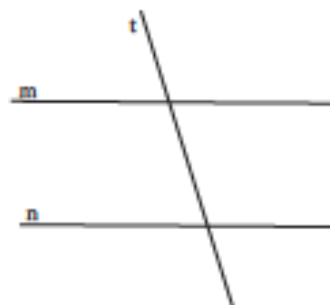
- немају заједничко теме
- леже на истој страни од трансверзале
- оба су унутрашња или оба су спољашња

У нашем примеру, **супротни углови** су следећи парови углова: α и δ_1 ; β и γ_1 ; γ и β_1 ; δ и α_1

Задатак 1

На цртежу паралелне праве m и n се секу са трансверзалом t . Прецртај га у своју свеску и обележи следеће углове:

- унутрашње углове,
- спољашње углове.
- Изабери два пара наизменичних углова, објасни са које стране трансверзале се налазе и да ли су унутрашњи или спољашњи.
- Изабери два пара супротних углова, објасни са које стране трансверзале се налазе и да ли су унутрашњи или спољашњи.



Ако су праве a и b паралелне и t је трансверзала, онда:

сагласни углови
су једнаки



наизменични углови
су једнаки

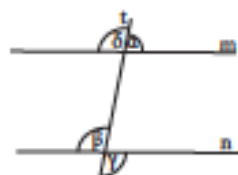


супротни углови
су суплементни



Задатак 2

Одреди углове означене словима на цртежу и објасни свој одговор. На цртежу $m \parallel n$ и $\alpha = 67^\circ$. Израчунај углове β , γ и δ .

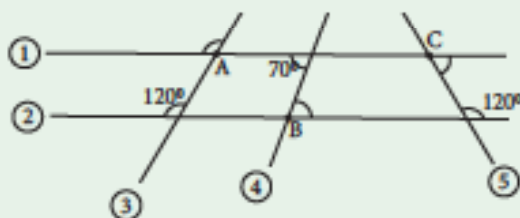


Пример 3

Изради решење за саобраћајницу која укључује две паралелне главне саобраћајнице и три споредне које секу прве две. Саобраћајнице и неке од тачака пресека дате су на цртежу. Израчунај углове у означеним тачкама и објасни како везе између тих углова могу да се користе у реалном свету.

Решење:

$\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Објасни зашто. Истражуј како углови утичу на: безбедност саобраћајница, изградњу инфраструктуре, навигацију и оријентацију, као и економску анализу.



Задатак 3

Један инжењер ради на дизајну парка који ће садржати:

- Две паралелне ограде које ограничавају простор парка (паралелне праве a и b).
 - Три стазе које секу парк и повезују се са оградама под различитим угловима (трансверзале t_1 , t_2 и t_3).
- а) Одреди колико ће се углова формирати при сечењу стаза t_1 , t_2 и t_3 са паралелним оградама a и b .
- б) Користи појмове унутрашњи, спољашњи, сагласни, супротни и наизменични углови да објасниш углове који се формирају.
- в) Запиши по један пар од сваке врсте углова на трансверзалама t_1 , t_2 и t_3 .

Размисли о ситуацији у којој две паралелне саобраћајнице се секу са правом нормалном на њих. Какви су углови који се формирају са сечицом?

Нацртај две паралелне праве и трансверзалу у својој свесци. Одговори на питања користећи цртеж који си нацртао.

- Да ли разликујем углове који се формирају између трансверзале и паралелних правих?
- Могу ли да израчунам непознате углове када је један угао дат?
- Како могу да применим ове концепте у инжењерским или путним плановима?

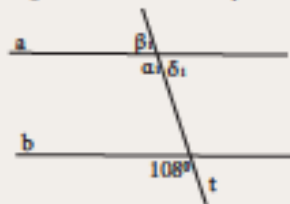
Самосталан рад

- Две паралелне праве a и b се секу са трансверзалом t , при чему је један од унутрашњих углова 65° .
 - Означи све друге углове који се формирају.
 - Идентификуј који углови су унутрашњи, спољашњи, наизменични, супротни и сагласни.
 - Одреди све формиране углове.
- Инжењер пројектује мост који са реком формира угао од 75° , али мост сече и обале које су паралелне.
 - Идентификуј наизменичне и сагласне углове.
 - Израчунај све углове који се формирају између моста и обала.
- У урбанистичком плану, две паралелне улице a и b се секу са другом улицом као трансверзалом t . При мерењу, један угао са теменом у тачки пресека једне од правих a или b са трансверзалом је 45° . Израчунај све друге углове који се формирају.

- На цртежу $m \parallel n$ и δ је 5 пута мањи од α . Нађи углове α и δ .



- Праве a и b се секу са правом t . Један од углова је 108° . Израчунај углове δ_1 , β_1 и α_1 .



Конвексни и неконвексни многоуглови

У овој лекцији ћеш научити како да разликујеш конвексне од неконвексне многоуглове. Ови геометријски облици су основа за даље проучавање геометрије. Правилно разумевање њихових карактеристика је веома важно за то како их класификујеш и користиш у различитим областима, као што су архитектура, инжењерство и природне науке.

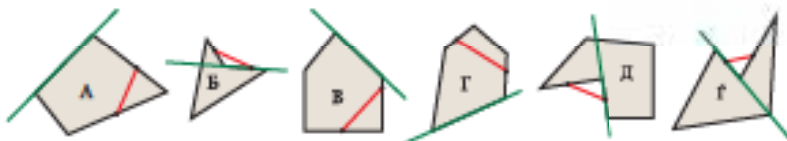


Пример 1

Направи мисаону мапу са основним појмом многоугао. Потруди се да укључиш и већ проучене појмове и класификације у вези са тим појмом.

Пример 2

Користи цртеж и одговори на питања



- У сваком многоуглу је повучен дуж. Шта можеш да кажеш о дужи у сваком многоуглу?
- По једној од страница сваког многоугла је повучена права. Која је разлика између многоуглова у односу на праву?

Решење:

- Код неких од многоуглова дуж није садржана у многоуглу. Да ли то важи за сваку дуж код неких од многоуглова? За које многоуглове?

Један многоугао се назива конвексним ако је конвексна геометријска 2Д-форма, односно ако за сваке две тачке А и Б тог многоугла, дуж АБ, целосно се налази у њему.

- Код многоуглова А, В и Г може се уочити да је многоугао потпуно са једне стране праве, а код многоуглова Б, Д и Ђ многоуглови нису потпуно са исте стране те праве. Да ли то важи за сваку страну многоуглова на којој је нацртана права која садржи ту страну? За које многоуглове си одговорио ДА, а за које НЕ?

Можемо да закључимо:

1. Ако за сваку страну многоугла нацртамо праву која садржи ту страну и цео многоугао остане са исте стране те праве, онда је многоугао конвексан.
2. Ако за неку страну многоугла нацртамо праву која садржи ту страну, а део многоугла остане са супротне стране те праве, онда многоугао није конвексан, већ је неконвексан.

Задатак 1

На цртежу постоје два 2Д облика.

- а) Да ли је први 2Д облик конвексан или неконвексан? Објасни свој одговор.
- б) Да ли је други 2Д облик конвексан или неконвексан? Објасни свој одговор.



Пример 3

Марко и Лена одлучују да поставе ограду око своје баште у дворишту. Имају две опције: ограду у облику конвексног многоугла или ограду у облику неконвексног многоугла.

- а) Коју ограду ће им бити лакше да направе?
- б) Који облик ограде има углове или делове који ће морати да се означе другачије или ће бити потребно додатно прилагођавање?
- в) Какве би биле предности и мане ограде конвексног многоугла у поређењу са неконвексним многоуглом?

Решење:

- а) Конвексан многоугао (прва опција): Ограда ће моћи лако да се постави јер ће цео облик бити са исте стране праве која садржи сваку од страна многоугла.
- б) Неконвексан многоугао (друга опција): Код неких страна и углова могу се јавити тешкоће приликом постављања ограде јер ће део облика бити са супротне стране одређене праве.
- в) Избор ограде и начин постављања могу зависити од тога да ли је башта конвексан или неконвексан многоугао. Код конвексних многоуглова биће лакше поставити ограду, док код неконвексних многоуглова треба направити додатна прилагођавања.

Задатак 2

Где се срећу конвексни многоуглови, а где неконвексни?



Задатак 3

Погледај неке предмете у својој околини, на пример, објекте у дому или у природи, и одреди да ли су у облику конвексних или неконвексних многоуглова. Напиши неколико примера и објасни зашто их класификујеш на тај начин.

Замисли да треба да дизајнираш нов објекат за јавни простор (као парк или тржни центар). Како ћеш одлучити да ли да користиш конвексне или неконвексне форме у дизајну? Какве предности и мане ће имати те форме у изградњи и употреби објекта? Истражуј како утичу углови на функцију и естетику простора?

Одговори на питања у својој свесци, а затим их подели са својим саученицима.

- Разликујем и могу да објасним разлику између конвексних и неконвексних многоуглова.
- Могу правилно да класификујем многоуглове на конвексне и неконвексне.
- Могу да применим знања о конвексним и неконвексним многоугловима у свакодневним задацима и практичним примерима.

Самосталан рад

1. Проблем са избором дизајна парка

Опис: Треба да се направи уређење новог парка са стазама и зеленим површинама. Парк треба да има различите 2Д-облике. Стаза која води до главног улаза треба да има конвексан облик, док ће стаза која води до унутрашњих места имати неконвексан облик.

Питање: Какве ће бити разлике у естетици и функцији ако користиш конвексне и неконвексне облике за ове стазе?

2. Проблем са избором оgrade за башту

Опис: Планирај ограду за своју башту. За део оgrade ћеш користити правоугаоне панеле (конвексан многоугао), док за други део баште желиш да користиш ограду у облику неконвексног многоугла.

Питање: Какве практичне предности и недостатке би имала ова два различита дизајна у смислу безбедности и естетике твоје оgrade?

3. Проблем са изградњом крова

Опис: Када се гради кров куће, треба да се одлучи да ли да се користе конвексни или неконвексни облици како би се направио занимљив дизајн.

Питање: Који облик ће бити ефикаснији за одвод кишне воде и зашто?

4. Проблем са уређењем тротоара

Опис: За изградњу тротоара, треба да изабереш да ли ћеш користити плочице у облику конвексних многоуглова или ћеш се одлучити за облик неконвексних многоуглова који ће створити занимљив визуелни ефекат.

Питање: Какве ће бити предности и недостатке оба типа дизајна у погледу безбедности и удобности пешака?

Основни појмови о троугловима

У овој лекцији решаваћеш проблеме са применом основних појмова повезаних са троугловима, укључујући средњу линију, ортоцентар, тежиште, уписану и описану кружницу и збир углова у троуглу. Троугао је један од основних геометријских облика. Има три странице и три угла, а постоје многа важна својства која су повезана са његовим карактеристикама.



Пример 1

- Нацртај оштроугли и тупоугли троугао.
- Објасни шта је висина троугла. Повучи и именуј висине у сваком троуглу.
- У сваком од троуглова које си нацртао под а) повуци тежишне линије. Објасни шта је тежишна линија троугла.
- Нацртај описану и уписану кружницу код једног оштроуглог и једног тупоуглог троугла.
- Код сваког троугла измери углове и израчунај њихов збир.

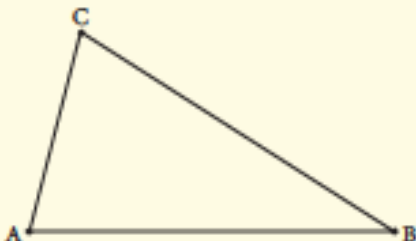
Пример 2

У $\triangle ABC$, $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\overline{BC} = 7\text{ cm}$, $\overline{AC} = 5\text{ cm}$.

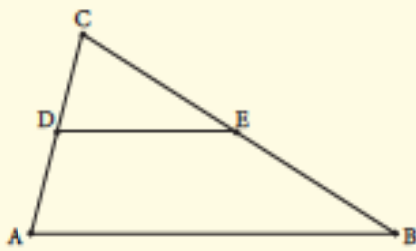
- Нацртај троугао у свеску и означи темена са А, В и С.
- Означи средину странице AC са D, а средину странице BC са E. Повежи тачке D и E и измери дужину дужи DE. Који закључак можеш да донесеш о дужини дужи DE?

Решење:

а)



б)



Ако си прецизно цртао, дужина дужи $\overline{DE} = 3\text{ cm}$. Она је паралелна са страницом AB, са којом нема заједничку тачку, и износи половину дужине странице AB у $\triangle ABC$.

Повежи средишње тачке страница АВ и АС, као и страница АВ и ВС. Шта можеш да кажеш о добијеним дужима? Колика је њихова дужина?

Средња линија је дуж која повезује средишње тачке двеју страница троугла.

Она је паралелна са страницом са којом нема заједничке тачке и износи половину дужине те странице.

У примеру 1, ако средњу линију DE означимо са m , имамо $m = \overline{DE} = \frac{AB}{2}, m \parallel AB$.

Задатак 1

У $\triangle DEF$, страница $DE = 10$ cm, $EF = 12$ cm, $DF = 14$ cm.

- Нацртај $\triangle DEF$ и његове средње линије.
- Колика је дужина сваке средње линије?
- На колико троуглова средње линије деле $\triangle DEF$?
- Поново нацртај троугао и одреди тежиште (Т) троугла.
На свакој тежишној линији измери растојање од темена до тежишта и од тежишта до средишње тачке странице која лежи супротно том темену. У каквом односу тежиште дели сваку тежишну линију?
- Како ћеш проверити да ли си био прецизан у цртању?
Колики је збир унутрашњих углова у троуглу?
Колики збир си добио ти?

Пример 3

Александра жели да направи дрвени украсни оквир у облику троугла како би га поставила око кружног цветног аранжмана. Она мора да одреди неколико важних тачака како би направила стабилну израду.

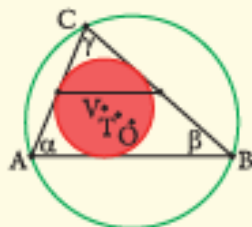
- Где треба Александра да постави украсну траку која ће бити паралелна са једном од страница троугла и имаће дужину половине те странице?
- Како може да постави троугаону рамку тако да свака њена страна додирује кружни цветни аранжман?
- Коју тачку троугла треба да одреди како би уравнотежила оквир на једној тачки?
- Како може да направи украс у облику круга који пролази кроз сва три темена троугла?

- д) Александра жели да израчуна углове свог троугла како би била сигурна да ће израда бити правилна. Колика треба да буде сума три унутрашња угла троугла?

Решење:

Да би јој помогао, нацртај према датим упутствима:

- Трака треба да буде постављена дуж средње линије троугла, паралелно са његовом основом.
- Да би поставила троугао око кружног цветног аранжмана, Александра треба да одреди центар уписане кружнице троугла.
- Да би уравнотежила оквир у једној тачки, Александра треба да одреди тежиште троугла. Како ћеш пронаћи тежиште троугла?
- Да би направила украс у облику круга који пролази кроз сва три темена троугла, Александра треба да одреди центар описане кружнице троугла.
- Ако је збир углова троугла 180° , тада Александра може бити сигурна да ће израда бити правилна.

**Задатак 2**

Илир жели да изгради платформу у облику троугла која ће бити стабилна. За ту сврху треба да одреди неколико кључних тачака у троуглу како би поставио носеће стубове и каблове.

- Да би платформа била стабилна, Илир треба да пронађе тачку у троуглу где може да постави централни ослонац који ће равномерно распоређивати силе. Која тачка у троуглу представља ову стабилну тачку ослонаца и како може да је пронађе?
- Каблови на платформи треба да буду причвршћени тако да буду једнако удаљени од све три носеће тачке платформе. Коју тачку троугла треба да пронађе Илир како би причврстио каблове тако да је растојање до сва три темена платформе једнако?
- Да би ојачао платформу, Илир жели да постави греду која ће повезати средишње тачке двеју страница троугла. Како може да пронађе ту дужину?

Ако имаш три штапа дужине 5 cm, 7 cm и 12 cm, да ли можеш да саставиш троугао од њих? Објасни како ти правило о дужинама страница троугла помаже да то утврдиш.

Нацртај троугао у своју свеску.



Обој сваки угао троугла према свом осећају сигурности за сваки критеријум:

Зелено – Потпуно разумем и могу да применим.

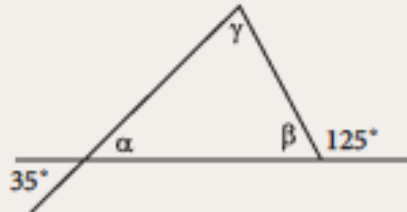
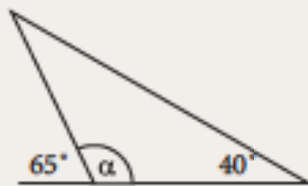
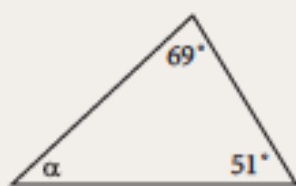
Жуто – Делимично разумем, али ми треба додатно вежбање.

Црвено – Осећам се несигурно и треба ми објашњење.

Уколико је неки угао жут или црвен, напиши питање које би желео да ти се разјасни.

Самосталан рад

1. Ако је у $\triangle ABC$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, колика је величина угла C ?
2. Објасни везу између величина углова и страница у троуглу у коме су сва три унутрашња угла по 60° . Какве су странице тог троугла по дужини?
3. У $\triangle ABC$, ако је унутрашњи угао при темену $B = 60^\circ$, а при темену $C = 50^\circ$, израчунај спољашњи угао троугла при темену A .
4. Дат је троугао са унутрашњим угловима $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, и $\angle C = 80^\circ$. Ако $\angle A$ остане 40° , а угао $\angle C$ се повећа за 10° , а сва три угла и даље чине троугао, колико степени треба да износи нови угао при темену B ?
5. У правоуглом троуглу са страницама 3 cm, 4 cm и 5 cm, колики је угао између страница од 3 cm и 4 cm?
6. Одреди означене непознате углове на цртежима:



7. У троуглу ABC дато је да је угао B за 15° мањи од угла A, а угао C је за 30° већи од угла B. Пронађи сва три угла троугла.
8. У троуглу ABC угао B је три пута мањи од угла A, а угао C је два пута већи од угла B. Пронађи сва три угла троугла.
9. У троуглу ABC странице су $AB = 8 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $AC = 10 \text{ cm}$.
 - а) У зависности од дужина страница, одреди који је тип троугла и који угао ће бити највећи, а који најмањи у троуглу.
 - б) Израчунај дужину сваке средње линије троугла.
10. За троугао ABC дужине средњих линија су 3 cm, 5 cm и 6 cm. Колике су странице троугла ABC?
11. а) Нацртај једнакостранични троугао.
 б) Одреди ортоцентар троугла.
12. Нацртај правоугаони троугао са катетама 8 cm и 6 cm.
 - а) Измери дужину хипотенузе.
 - б) Нацртај уписану кружницу троугла.
 - в) Нацртај описану кружницу троугла.

Конструкција троуглова

У овој лекцији научићеш како да конструишеш троуглове у различитим ситуацијама, користећи дате информације: три странице, две странице и угао између њих, као и једну страницу и два угла који леже на тој страни.

Троугао је геометријски облик са три странице и три угла. Конструисање троуглова може се вршити уз различите комбинације датих информација, као што су странице и углови.



Пример 1

Изради значку за спортске такмичења. Значка треба да буде у облику правоуглог троугла са катетом од 8 cm и углом од 30° између катете и хипотенузе. За ту сврху користи лист папира, лењир, угломер, троугао, шестар и оловку.

Решење:

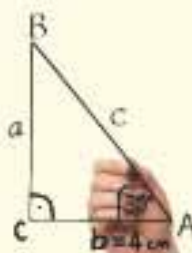
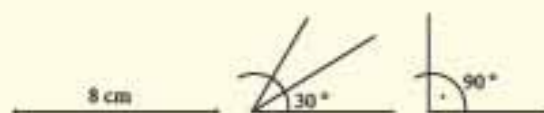
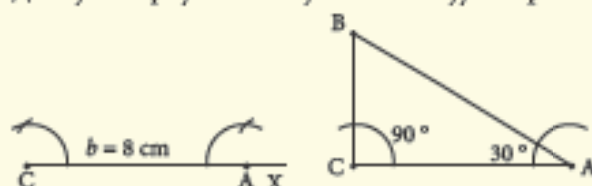
Прво нацртај задате елементе помоћу лењира. Углове од 30° и 90° можемо конструисати помоћу шестара (углове које не можеш конструисати црташ са угломером). Затим слободном руком направи скицу троугла који треба да конструиреш означавајући његове елементе. Следи анализа скице и њена примена у корацима конструкције.

Прати кораке и цртај у својој свесци.

Кораци за конструкцију:

- Нацртај полуправу CX и пренеси дужину од 8 cm помоћу шестара почевши од тачке C .
- Крајњу тачку те дужине означи као A .
- Пренеси углове од 30° и 90° у темињима A и C .
- Повуци кракове пренетих углова.
- Пресек другог крака угла од 30° и другог крака правог угла означи као B .

Добијени троугао ABC је значка коју си требало да направиш.



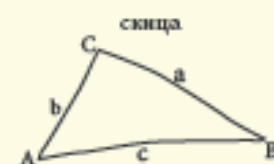
Пример 2

Конструирати троугао са странама $a = 35 \text{ mm}$, $b = 25 \text{ mm}$, $c = 32 \text{ mm}$.

Решење:

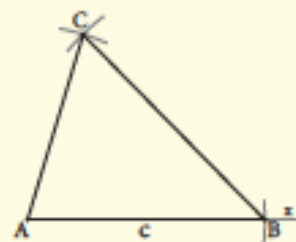
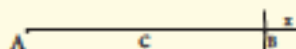
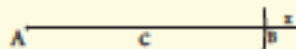
- Нацртај дате елементе троугла помоћу лењира.
- Направи скицу троугла и означи елементе (темена, стране и углове).
- Из анализе скице дођи до корака за конструкцију.

дадени елементи	
a	
b	
c	



Кораци за конструкцију троугла када су дате три стране (ССС):

- Нацртај полуправу AX и шестаром пренеси дужину странице c .
- Пресек кружног лука са полуправом AX означи као B .
- Шестаром узми дужину b и постави врх шестара у тачку A (односно, нацртај кружни лук са центром у A и радијусом b).
- Потом отвори шестар онолико колика је дужина a и постави врх шестара у тачку B (нацртај кружни лук са центром у B и радијусом a).
- Пресек два кружна лука које ћеш направити биће тачка C . Ако постоје две пресечне тачке, изабери једну (у зависности од услова у задатку).
- Линијаром повежи тачке A и C , B и C .
 $\triangle ABC$ је конструисан.



Задатак 1

Конструирај троугао са странама од 5 cm, 7 cm и 9 cm.
 Провери да ли су све стране једнаке са датим дужинама.

Пример 3

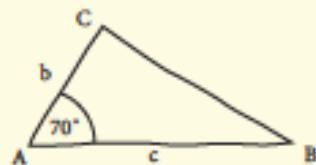
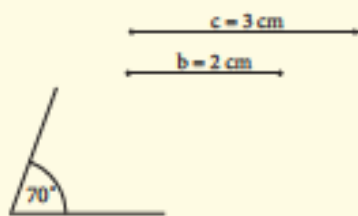
Дате су две стране од $b = 5$ cm и $c = 8$ cm, а угао између њих је $\alpha = 70^\circ$. Користи линијар и шестар да конструираш троугао.

Решење:

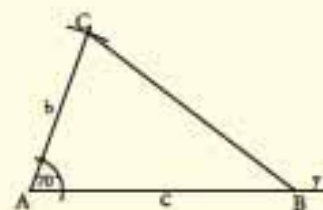
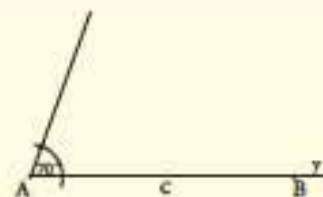
- Нацртај дате елементе троугла, две стране и угао између њих, помоћу линијара и угаоника.
- Направи скицу троугла и означи његове елементе (темена, странице и углове).
- Из анализе скице долази се до корака за конструкцију.

Кораци за конструкцију троугла када су дате две стране и угао између њих (САС):

- Нацртај полуправу AY .
- Отвори шестар онолико колика је дужина $c = \overline{AB}$, односно једна страна троугла (нацртај кружни лук са центром у A и радијусом $c = AB$).



- Пресек кружног лука са полуправом означи га као B , тј. $k(A, \overline{AB}) \cap AY = \{B\}$.
- Пренеси угао од 70° шестаром у темену A .
- Повуци другу крак угла од 70° линијаром.
- На другом краку угла од 70° направи лук шестаром који отвараш онолико колико је страница $b = AC$ почевши од тачке A (кружни лук са центром A и полупречником $b = AC$).
- Пресек другог крака угла са луком означи као C .
- Повежи тачке B и C .
- $\triangle ABC$ је конструисан.

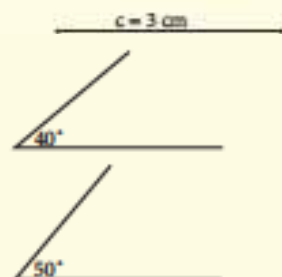
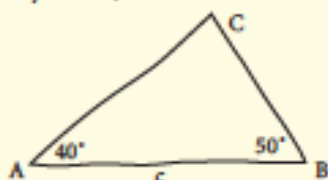


Пример 4

Конструисај троугао ако је дата једна његова страна од $c = 7$ cm и два угла: $\alpha = 40^\circ$ и $\beta = 50^\circ$ који леже на тој страни троугла.

Решење:

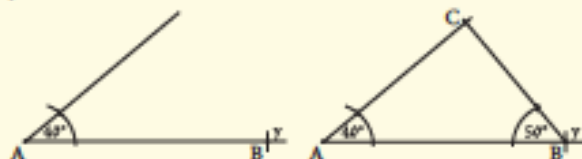
- Нацртај дате елементе троугла, страну и два угла помоћу линијара и угаоника.
- Направи скицу троугла и означи елементе (темена, странице и углове).



- Из анализе скице долази се до корака за конструкцију.

Кораци за конструкцију троугла када су дати једна страна и два угла на страни: (АСА)

- Нацртај полуправу AY .
- Пренеси дужину $c = AB$ и означи тачку B .
- Пренеси шестаром угао од 40° са теменом у тачки A .
- Пренеси шестаром угао од 50° са теменом у тачки B .
- Пресек добијених кракова углова од 40° и 50° означи као C .
- $\triangle ABC$ је конструисан.



Задатак 2

Конструиши троугао за који је дато:

- а) $\overline{MN} = 7 \text{ cm}$, $\angle NMP = 65^\circ$, $\angle MNP = 70^\circ$ б) $\overline{KL} = 7 \text{ cm}$, $\overline{KQ} = 6 \text{ cm}$, $\overline{LQ} = 5 \text{ cm}$
 в) $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$, $\angle ABC = 45^\circ$

Пример 5

Радник на градилишту приликом израде крова треба да конструише троугао за који су дати дужина странице 9 m и два угла који леже на тој страни од 45° и 65° .

Упутство за решавање: У твојој свесци уместо метара користи cm и кораке за конструкцију дате у четвртог примеру (АСА). Провери да ли је у конструисаном троуглу збир углова 180° .

Задатак 3

При геодетском мерењу треба да се конструише теренска мапа где један троугао има следеће елементе: једна страница $\overline{AB} = 8 \text{ m}$, друга страница $\overline{AC} = 7 \text{ m}$ и угао између њих $\angle CAB = 50^\circ$. Користећи размер, конструиши троугао и измери дужину странице супротне углу од 50° . Колика је његова дужина у природној величини?

Када си конструисао троуглове у овој лекцији, који кораци су ти били најлакши, а који најизазовнији? Шта би променио у свом приступу да будеш бржи и прецизнији убудуће у задацима у којима се тражи конструкција троугла?

Одговори у својој свесци. За конструкцију троугла за коју ниси сигуран/сигурна, поново погледај пример из лекције.

- Запиши своја размишљања о конструкцији троуглова.
- Да ли си успео да примениш правила и појмове у практичним задацима?
- Да ли разумеш разлику између различитих начина конструкције?

Самосталан рад

1. Конструиши једнакостранични троугао са страницом 5 cm.
- 2*. Конструиши правоугли троугао са хипотенузом 6 cm и углом од 45° .
3. Конструиши једнакокраки троугао са основом 7 cm и углом при основи од 55° .
4. Конструиши једнакокраки троугао са краком 8 cm и углом између кракова од 75° .
5. Конструиши једнакокраки правоугли троугао са краком 4 cm.

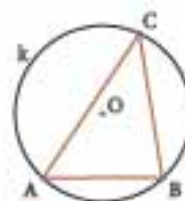
Конструкција описане и уписане кружнице у троуглу

У овој лекцији ћеш научити како да конструишеш центар описане и уписане кружнице у троуглу, као и важност тих тачака у геометријским конструкцијама. Центри уписане и описане кружнице су важне тачке у троуглу. Те тачке су важне јер помоћу њих можеш да направиш кружницу која додирује стране троугла (уписана) или пролази кроз сва темена троугла (описана). Оне су кључне у различитим геометријским задацима, као и у дизајну и инжењерству.



Пример 1

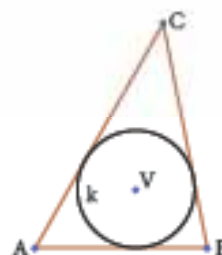
Нацртај описану кружницу троугла са странама 5 cm, 6 cm и 7 cm. Објасни шта је описана кружница троугла. Ако си цртао прецизно, кружница ће пролазити кроз темена троугла.



Пример 2

Нацртај уписану кружницу троугла са странама 6 cm, 8 cm и 9 cm. Објасни шта је уписана кружница троугла. Ако си цртао прецизно, кружница ће додиривати све три стране троугла. Шта представља свака страна троугла за кружницу?

Да би нашао центре описане и уписане кружнице у троуглу, у горњим примерима си користио лењир и угломер.



Пример 3

Конструиши центар описане кружнице троугла са странама 6 cm, 5 cm и 4 cm.

Када се каже „конструиши“, мисли се на коришћење само шестара и лењира.

Решење:

За ову конструкцију можеш да се подсетиш на конструкцију троугла ако су дате три стране и конструкцију симетрале дужи. Да би конструисао центар описане кружнице, следи ове кораке и цртај у својој свесци:

- Конструиши $\triangle ABC$ са датим трима странама (CCC).
- Конструиши симетралу странице AB у $\triangle ABC$.
- Конструиши симетралу странице BC.
- Конструиши симетралу странице CA (ову симетралу можеш и да не конструишеш, зашто?)

- Пресек симетрала страница троугла $\triangle ABC$ означи са O .
- Врх шестара постави у тачку O .

Отвори шестар до било ког темена троугла и опиши кружницу.



Пример 4

Конструиши центар уписане кружнице троугла са странама 6 cm, 8 cm и углом од 70° .

Решење:

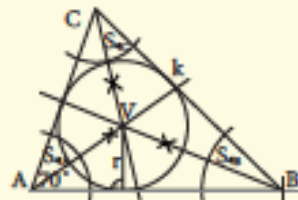
За ову конструкцију можеш се најпре подсетити конструкције троугла када су дате две странице и угао између њих, и конструкције симетрале угла. Да би конструисао центар уписане кружнице, прати кораке и цртај у својој свесци:

- Конструиши троугао са датим странама и углом између њих (SAS).
- Конструиши симетралу угла $\sphericalangle A$ троугла $\triangle ABC$.
- Конструиши симетралу угла $\sphericalangle B$ троугла $\triangle ABC$.
- Конструиши симетралу угла $\sphericalangle C$ троугла $\triangle ABC$ (може и да се не конструише, довољне су две).
- Пресек симетрала углова троугла означи са V .
- Врх шестара постави у тачку V .

Отвори шестар колико је растојање до било које стране троугла (на цртежу означено са r) и нацртај кружницу.

У примеру 3 и примеру 4, да би конструисао описану и уписану кружницу троугла, користио си лењир и шестар.

Који начин одређивања центра описане и уписане кружнице троугла је прецизнији – са лењиром и угломером или са лењиром и шестаром?



Задатак 1

Конструиши уписану и описану кружницу троугла са страном 5 cm и угловима уз ту страну од 30° и 70° .

Пример 5

У једном парку планира се постављање фонтане у облику кружнице тако да додирује све три стазе које формирају троугао. Затим треба поставити цветни део у кружном облику описаном око тог троугла.

Решење:

- Направи скицу према подацима из примера 5.
- Нацртај троугао формиран од стаза у парку. (са дужинама страница по твом избору)
- Конструирај уписану кружницу троугла да би одредио позицију фонтане.
- Конструирај описану кружницу троугла да би испланирао цветни део око троугла.

Ово ће обезбедити естетски распоред фонтане и цветног дела у односу на стазе у парку.

Задатак 2

На једном градском тргу у облику троугла треба да се поставе светла:

- Једна главна светлост је у центру трга за равномерно осветљење (једнако удаљена од три стране троугла).
- Декоративна светла у кружној линији око трга како би се осветлила цела површина.

Како би одредио:

- Тачну локацију главне светлости?
- Радијус и центар кружнице за постављање декоративних светала?

Наброј примере где може да се примени конструкција уписане и описане кружнице троугла? Објасни значај прецизности при конструкцији у тим ситуацијама.



Пиши у свеску. Подели своје одговоре са својим школским друговима.

- Напиши кратку рефлексију о томе шта си научио о конструкцији центара описане и уписане кружнице.
- Да ли си успео правилно да примениш појмове?
- Какве задатке из свакодневног живота можеш решавати овим техникама?

Самосталан рад

Задачи за конструкцију уписане и описане кружнице троугла:

1. Нацртај кружну ограду око троугластог простора (7 m, 5 m и 8 m). Користи размер.
2. Дизајнирај кружну цветну башту око фонтане у облику једнакокраког троугла (крак 7 m и угао између кракова 80°). Користи размер.
3. Нацртај место за споменик на простору у облику троугла (једна страна 4 m и углови уз ту страну 45° и 45°), а затим конструиши кружницу око троугла која ће се користити за додатне декоративне елементе. Користи размер.
4. Конструиши уписану и описану кружницу једнакостраничног троугла са страном 5,5 cm.
5. Симеон је на својој њиви изабрао три тачке у којима ће се поставити прскалице за наводњавање. Помози му да пронађе локацију централне тачке за постављање места за довод воде које ће бити једнако удаљено од све три прскалице за наводњавање.
6. (Задатак уз коришћење едукативног софтвера): Треба да израдиш пројекат за дизајн новог парка у свом граду. Парк треба да има геометријске елементе као што су стазе, дрвореди, цветне површине, чесме, клупе, фонтане, светла која формирају троуглове и кружнице. Твој задатак је да користиш едукативни софтвер да их нацрташ. Притом ћеш морати и да проналазиш тачке додира између троуглова и кружница како би обезбедио правилна растојања и пропорције дате у пројекту, као и неке карактеристичне тачке у троугловима одговарајуће за циљ који треба да обезбеди стабилност и разноврсно и правилно уређење простора. Користи различите алатке из едукативног софтвера помоћу којих ћеш приказати што више геометријских појмова као што су конструкција, дуж, угао, симетрала, ортоцентар, тежиште, мерење, уписана, описана кружница и сл.

Четвороуглови и класификација према паралелности страница

Четвороуглови су многоуглови који имају четири стране, четири унутрашња (спољашња) угла и четири темена. Они могу да се класификују према различитим карактеристикама, као што су: дужина страна, величина углова или паралелност страна. У овој лекцији ћеш се фокусирати на класификацију четвороуглова према паралелности њихових супротних страна. Научићеш како да препознаш различите врсте четвороуглова, као што су правоугаоници, ромбови, паралелограми, трапези и квадрати. Ово знање не само да ће ти помоћи у геометрији, већ ћеш га користити и у свакодневним ситуацијама, на пример, при избору облика у архитектури или дизајну.



Пример 1

Александра и њени пријатељи одлучили су да направе украс за школски догађај. Они су исекли папир у облику као на цртежу. Док су украшавали облик који су исекли од папира, подсетили су се на неке важне геометријске појмове. Подсети се и ти, одговарајући на следећа питања:

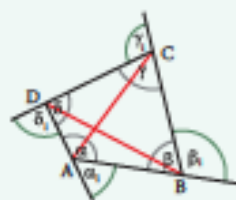


- Какав 2Д облик су исекли Александра и њени пријатељи? Објасни зашто.
- Да ли је четвороугао конвексан или неконвексан многоугао?
- Колико темена, страна и углова има четвороугао?
- Које стране четвороугла су суседне, а које супротне?
- Која темена четвороугла су суседна, а која супротна?
- Који углови четвороугла су суседни, а који супротни?
- Који углови четвороугла су унутрашњи, а који спољашњи?
- Како можеш да нађеш спољашњи угао четвороугла?
- Повучеш ли дијагонале четвороугла — какве троуглове добијаш са сваком дијагоналом?

Многоугао који има четири стране (четири темена, угла) називамо четвороугао.

Решење:

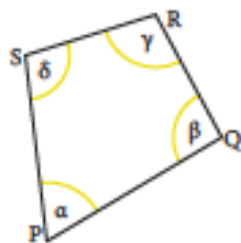
Направи цртеж у својој свесци као дати цртеж и користи га да одговориш на питања



Задатак 1

За четвороугао PQRS са цртежа, запиши:

- Суседна и супротна темена
- Суседне и супротне стране
- Суседне и супротне углове
- Колико парова супротних страна има сваки четвороугао?



Пример 2

Ана и Бојан су се играли у парку и приметили различите облике плочица на стази. Ана је приметила да неке од плочица изгледају као да имају паралелне стране, а друге не. Одлучили су да нацртају облик неколико плочица и да потраже помоћ од наставнице како би сазнали више о њима.



Наставница им је дала три питања како би категорисали плочице према паралелности страна:

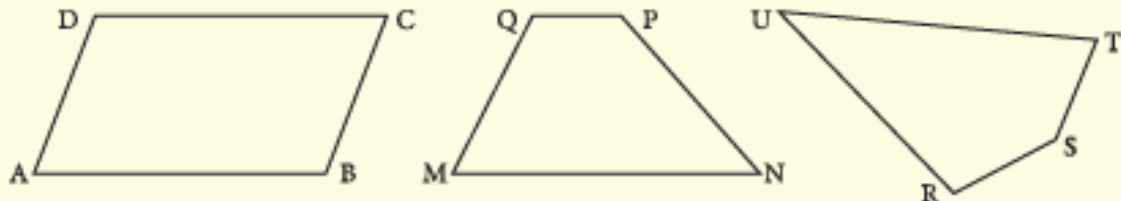
Прво питање: Плочица коју је Ана посматрала има два пара паралелних супротних страна. Каква врста четвороугла је ова плочица?

Друго питање: Бојан је нацртао плочицу са само једним паром паралелних супротних страна, док друге две нису паралелне. Каква врста четвороугла је ово?

Треће питање: На крају, они су нацртали плочицу која нема ниједан пар паралелних супротних страна. Каква врста четвороугла је овај облик?

Нацртај три различита четвороугла која одговарају описима из питања. Означи темена и провери да ли су стране паралелне, а ако јесу — одговори колико парова паралелних страна имају. Објасни у коју категорију припада сваки четвороугао према паралелности страна.

Решење:



Први четвороугао (Анин) припада категорији четвороуглова који имају два пара паралелних супротних страна.

Други четвороугао (Бојанов) припада категорији четвороуглова који имају само један пар паралелних супротних страна.

Трећи четвороугао припада категорији четвороуглова који немају ниједан пар паралелних супротних страна.

Према паралелности страна, четвороуглове можемо да класификујемо у три категорије:

- Четвороугао у којем су по два пара супротних страна паралелна зове се паралелограм.
- Четвороугао који има само један пар паралелних страна зове се трапез.
- Четвороугао који нема ниједан пар паралелних страна зове се трапезоид.

Трапезоид у којем су по два пара суседних страна једнака зове се делтоид.



Равнокраки трапез је трапез код кога непаралелне странице имају једнаке дужине.

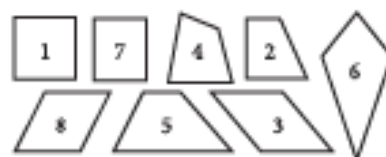


Задатак 2

На цртежу је дато више четвороуглова.

а) Прецртај табелу у своју свеску и попуни је:

Четвороуглови	Број којим је означен четвороугао
Паралелограм	
Трапез	
Трапезоид	



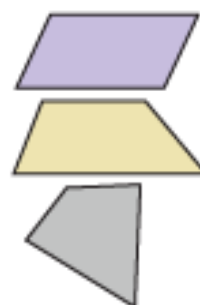
б) Који од четвороуглова је делтоид? Објасни зашто.

Пример 3

Локална заједница организује акцију чишћења парка.

Волонтери су приметили да су неке од плочица на старом игралишту напукле и треба их заменити. Нове плочице које треба да се наруче су у облику четвороуглова, али добављач нуди различите врсте четвороуглова.

Да би олакшао посао, координатор акције је замолио једног волонтера да класификује плочице према паралелности страна.



- Једна од старијих плочица има два пара паралелних супротних страна. Каква врста четвороугла је та плочица?
- Једна од нових плочица има само један пар паралелних страна. Каква врста четвороугла је та плочица?
- Неки остаци од старих плочица немају паралелне стране. Каква врста четвороугла су те плочице?
- Нацртај по један четвороугао из сваке категорије (са два пара паралелних страна, са једним паром паралелних страна и без паралелних страна). На сваком цртежу означи које стране су паралелне.

Решење:

- Плочица са два пара паралелних страна је паралелограм.
- Плочица са једним паром паралелних страна је трапез.
- Плочица без паралелних страна је трапезоид.
- Парови паралелних страна су обојени плавом, црвеном или зеленом бојом.

**Задатак 3**

Ана жели да уреди башту у свом дворишту. Она планира да посади цвеће и поврће у различитим облицима парцела које имају четвороугаону форму. Ево плана који је направила:



- Каква врста четвороугла је свака парцела у плану који је Ана направила?
- Како може најлакше да измери стране и да утврди да ли су паралелне или не?
- Ана жели да направи стазу у свакој парцели која повезује супротна темена парцеле. Како може да се увери да ће та стаза поделити сваку парцелу на два троугла? Објасни свој одговор.

Направи мисаону мапу за појам четвороугао у коју ћеш укључити све досад научене концепте у вези тог појма.

Одговори на следећа питања у свесци:

- Да ли тачно класификујем четвороуглове према паралелности страна?
- Да ли правилно користим појмове за различите врсте четвороуглова (паралелограм, трапез, трапезоид)?
- Како бих оценио своје разумевање четвороуглова? (Од 1 до 5, где је 1 потпуно неразумевашење, а 5 потпуно разумевање).

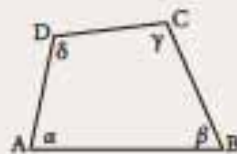
Ако ниси сигуран у неки од појмова — врати се поново на лекцију.

Самосталан рад

1. Који су основни елементи четвороугла?

2. У вези са четвороуглом ABCD запиши:

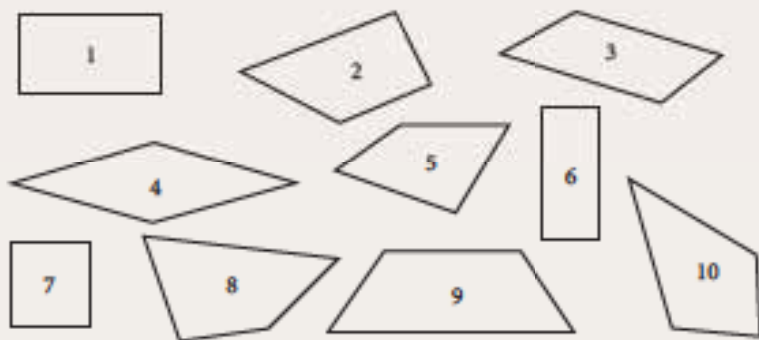
- а) два суседна темена
- б) две суседне стране
- г) два супротна угла



3. Шта је тачно?

- а) Сваки четвороугао има само један пар супротних темена.
- б) Сваки четвороугао има само два пара суседних страна.
- в) Сваки четвороугао има две дијагонале.

4. Класификуј четвороуглове са цртежа према паралелности страна.



5. Нацртај две паралелне праве m и n , а затим их пресеци са друге две паралелне праве l и k . Пресечне тачке права означи словима.

- а) Какав четвороугао си добио?
- б) Именуј унутрашње и спољашње углове тог четвороугла.
- в) Колика је величина сваког унутрашњег и одговарајућег спољашњег угла? Користи угломер.

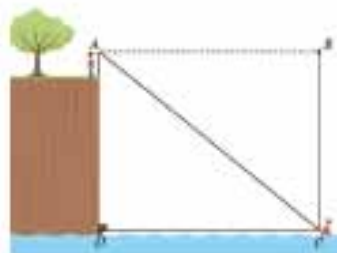
6. Нацртај четвороугао MNPQ и повуци његове дијагонале. Објасни (запиши) шта је дијагонала четвороугла.

7. Нацртај две паралелне праве m и n . На праву m означи две тачке M и N, а на праву n тачку P. Затим доцртај један паралелограм и један трапез са заједничким теменима M, N и P.

Збир углова у четвороуглу

До сада си се сусрео са различитим четвороугловима (паралелограм, трапез, трапезоид). Иако ови четвороуглови изгледају различито, имају једно заједничко својство – збир њихових унутрашњих углова је увек исти!

У овој лекцији ћеш научити: Како да израчунаш збир углова у сваком четвороуглу; Зашто сви четвороуглови имају исти збир углова, без обзира на њихов облик; Како да користиш ово својство за решавање задатака и проблема у геометрији.



Пример 1

Архитекта планира да изгради троугласти прозор са угловима од 65° и 75° . Каква врста троугла је прозор?

Упутство за решавање. Одреди непознати угао у троуглу како би одговорио на питање која је врста тог троугла.

Задатак 1

Троугао ABC има угао од $32^\circ 44'$, а други угао је два пута већи од датог угла. Колики је трећи угао троугла ABC?

Пример 2

Израчунај збир углова у четвороуглу MNPQ.

Решење:

Збир углова у четвороуглу је $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Ако се повуче дијагонала MP у четвороуглу MNPQ, он се дели на два троугла. Из $\triangle MNP$ имамо:

$$\angle 1 + \beta + \angle 3 = 180^\circ.$$

Из $\triangle MPQ$ имамо: $\angle 2 + \delta + \angle 4 = 180^\circ$.

(збир углова у троуглу)

Ако ове две једначине саберемо — лево и десно посебно,

$$\text{добивамо: } \angle 1 + \angle 2 + \beta + \angle 3 + \angle 4 + \delta = 2 \cdot 180^\circ.$$

Заменом $\angle 1 + \angle 2 = \alpha$ и $\angle 3 + \angle 4 = \gamma$

$$\text{се добија } \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$



У сваком четвороуглу, збир унутрашњих углова је једнак 360° , односно једном пуном углу.

Пример 3

Пронађи збир спољашњих углова четвороугла ABCD.

Решење:

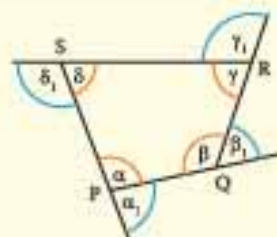
Сваки унутрашњи угао са одговарајућим спољашњим углом чини раван угао, односно:

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ; \quad \beta + \beta_1 = 180^\circ; \quad \gamma + \gamma_1 = 180^\circ; \quad \delta + \delta_1 = 180^\circ$$

Ако саберемо посебно леве и десне стране ових једначина,

$$\text{добијамо: } (\alpha + \beta + \gamma + \delta) + (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1) = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

Пошто је $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (збир унутрашњих углова), добијамо збир спољашњих углова $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$.



У сваком четвороуглу, збир спољашњих углова је једнак 360° , односно једном пуном углу.

Другим речима, збир унутрашњих и спољашњих углова у четвороуглу је 360° сваки.

Задатак 2

Три од спољашњих углова четвороугла су: 72° , 141° и 55° . Одреди унутрашње углове четвороугла и четврти спољашњи угао.

Пример 4

Ти си један од чланова школског тима који треба да уреди школско двориште које има облик четвороугла. Три унутрашња угла школског дворишта су: 90° , 110° и 89° . Колики је четврти унутрашњи угао? Одреди сваки спољашњи угао четвороугла.

Решење:

Пошто је збир унутрашњих углова било ког четвороугла 360° , а збир дата три угла је: $90^\circ + 110^\circ + 89^\circ = 289^\circ$. Четврти угао је: $360^\circ - 289^\circ = 71^\circ$. Унутрашњи угао заједно са одговарајућим спољашњим углом формира раван угао, па тако на пример, за спољашњи угао који одговара углу од 110° имамо $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Пронађи преостале спољашње углове четвороугла.

Задатак 3

У парку има жардињера у облику четвороугла са угловима 90° и 120° . Колика су друга два угла жардињере?

Дали постоји четвороугао код кога је збир три унутрашња угла једнак четвртом унутрашњем углу? Дали постоји четвороугао код кога су сва четири угла оштри углови?

Одговори на питања у свеску. За оно што ти је потребно за побољшање разумевања врати се на лекцију.

1. Шта сам научио о угловима четвороугла?
2. Где имам тешкоће у разумевању или примени онога што сам учио у овој лекцији?
3. Шта могу да урадим да побољшам своје разумевање?

Самосталан рад

1. У четвороуглу $ABCD$, $\angle A$ је 75° , $\angle B + \angle C = 210^\circ$. Колика степени има угао $\angle D$?
2. У једном четвороуглу, три спољашња угла су: 120° , 80° и 100° . Одреди четврти спољашњи угао.
3. У једном четвороуглу $ABCD$ два унутрашња угла код темена A и D су 65° и 120° , редом. Спољашњи угао код темена C износи 70° . Одреди величине унутрашњих углова код темена B и C .
4. Да ли постоји четвороугао у коме су сви унутрашњи углови већи од 90° ? Објасни одговор.
5. При мерењу углова у једном четвороуглу добијено је да су: $\alpha = 75^\circ 20'$, $\beta = 130^\circ 10'$ и $\delta = 160^\circ$. Да ли је при мерењу направљена грешка? Објасни одговор.
6. У једном четвороуглу два унутрашња угла су једнака међу собом. Друга два угла су 70° и 120° . Одреди величину непознатих углова.
7. У једном четвороуглу један од углова је 30° , други је за 13° већи, а трећи је два пута већи од збира прва два. Одреди углове четвороугла.
- 8.* Једна од дијагонала парцеле у облику четвороугла дели парцелу на једнакостраничан и једнакокраки правоугли троугао. Одреди унутрашње углове парцеле.
- 9.* Два суседна угла четвороугла су 98° и 108° . Одреди угао између симетрала тих углова.

Паралелограм и својства паралелограма

У претходној лекцији си се упознао са једном важном врстом четвороугла – паралелограмом. Паралелограм је четвороугао у коме су супротне стране паралелне и једнаке. Ова врста четвороугла има занимљива својства која ћемо заједно истраживати.

Након што разумеш својства паралелограма, бићеш у могућности да их примењујеш у решавању различитих задатака и да их користиш у геометријским проблемима.



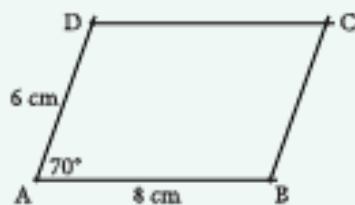
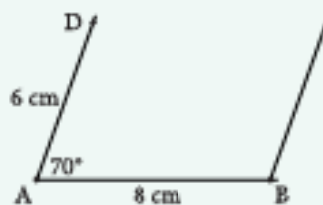
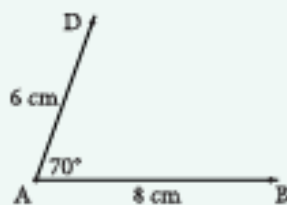
Пример 1

Једна од стаза у парку има облик паралелограма. Дужина једне стране стазе је 12 метара, а суседне стране 8 метара. Оштри угао који захватају стране је 70° . Нацртај стазу користећи размеру. Које карактеристике паралелограма ћеш користити да је нацрташ?

Решење:

Цртање паралелограма – паралелограм треба да има два пара супротних страна које су паралелне. У корацима (коришћен је размер):

- 1) Цртамо две стране са дагим дужинама које захватају угао од 70° и означена темена А, В, D
- 2) Повлачимо из тачке В паралелну полуправу са AD
- 3) Повлачимо из тачке D паралелну полуправу са АВ,
- 4) У пресеку две полуправе означавамо тачку С као четврто теме паралелограма.

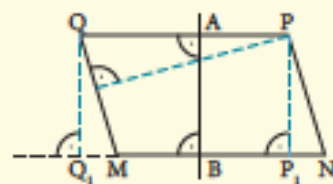


Пример 2

Нацртај висину паралелограма.

Решење:

У паралелограму MNPQ је нацртана права r нормална на супротне стране MN и PQ. Деоница АВ од нормале r на те стране назива се висина паралелограма. Висине су и деонице QQ_1 и PP_1 , тј. растојање између паралелних страна је свуда једнако.



Друга висина паралелограма је растојање између другог пара паралелних страница MQ и PN (као на пример нормала повучена од темена P ка страници QM).

Висина паралелограма је нормала спуштена од једног темена паралелограма до супротне странице. Дужина ове дужи је једнака растојању између паралелних страница.

Задатак 1

Колико висина из једног темена могу да се повуку код паралелограма? Нацртај произвољан паралелограм. Повуци висине из једног темена.

Пошто је паралелограм четвороугао, збир унутрашњих углова, као и збир спољашњих углова је 360° .

Пример 3

Нацртај више различитих паралелограма. У сваком од њих повуци једну од дијагонала (мању или већу). Исечи паралелограме. Потом сваки паралелограм пресечи по дијагонали коју си повукао.

- Какви су троуглови који се добијају када се паралелограм пресече по једној дијагонали?
- Какве су супротне стране паралелограма?
- Какви су супротни углови паралелограма?
- Какви су суседни углови паралелограма?

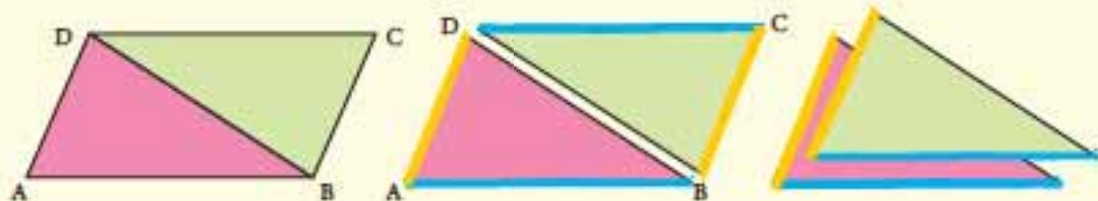
Решење:

- Када се паралелограм пресече по једној дијагонали, добијају се два троугла истог облика и величине.

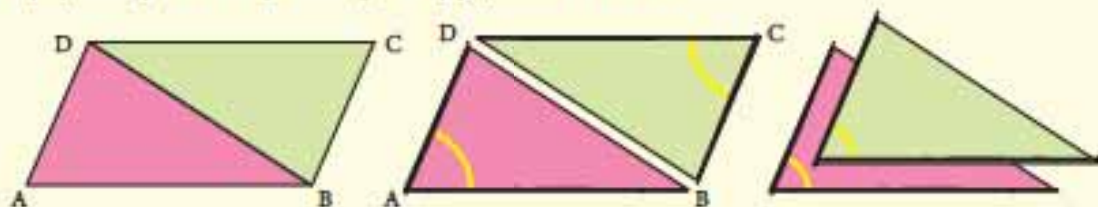


Свака дијагонала дели паралелограм на два троугла истог облика и величине.

б) Супротне стране паралелограма су једнаке по дужини.



в) Супротни углови паралелограма су једнаки по величини.

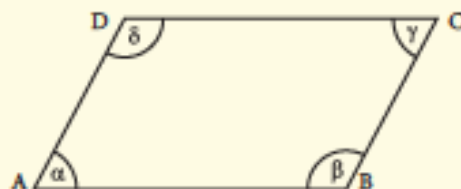


У сваком паралелограму супротне стране су једнаке по дужини.

У сваком паралелограму супротни углови су једнаки по величини.

г) Какви су суседни углови паралелограма?

За паралелограм ABCD са цртежа је дато да су $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$. Пошто су углови α и δ супротни на трансверзали AD (која сеца паралелне праве AB и CD), они су суплементни углови, односно $\alpha + \delta = 180^\circ$ (ово може да се покаже и за свака два уседна угла).



У сваком паралелограму суседни углови су суплементни.

Задатак 2

Збир два супротна угла паралелограма је 158° .

Израчунај углове у паралелограму.

Пример 4

Нацртај више различитих паралелограма.
У сваком паралелограму повуци обе дијагонале
као на цртежу и тачку пресека означи са S .
Пресечи их по дијагоналама.



- Који парови троуглова су једнаки по облику и величини?
- Упореди дужине AS и SC , и BS и SD ?
- Шта можеш да закључиш?

Решење:

- Када се сваки паралелограм пресече по дијагоналама, добијају се четири троугла.
Парови троуглова који су једнаки по облику и величини су: $\triangle ASB$ и $\triangle CSD$, $\triangle ASD$ и $\triangle CSB$, према цртежу.
- $AS = SC$ и $BS = SD$.
- Дијагонале паралелограма се секу у тачки S и она је њихова средишња тачка.

Дијагонале паралелограма се пресецају у средини.

Задатак 3

У паралелограму $MNPQ$ тачка пресека дијагонала је тачка S . Одреди дужину дијагонала ако је $SP = 8,5 \text{ cm}$ и $SQ = 5,7 \text{ cm}$.

Пример 5

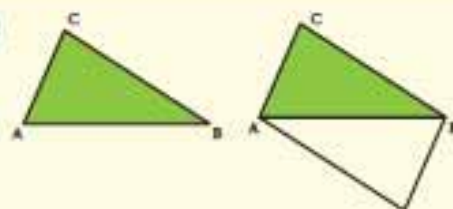
Валбона је имала привезак у облику троугла. Она је однела привезак златару јер је желела да га допуни до облика паралелограма.

- Конструиши привезак користећи информације о троуглу ABC ,
 $AB = 2,5 \text{ cm}$ и $AC = 1,5 \text{ cm}$ и угао између њих 60° .
- Допуни добијени цртеж до паралелограма.
- Колико различитих допуна може да се направи?

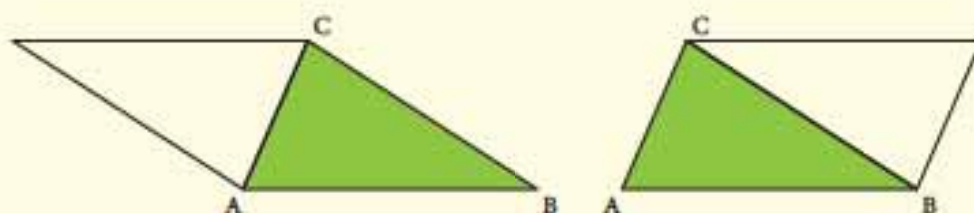
Решење:

- Ако је потребно, подсети се из лекције „Конструкција троугла“ на кораке конструкције троугла када су дате две стране и угао између њих.

б)

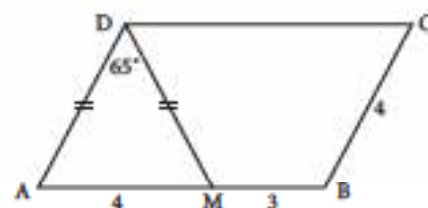


в) Други начини на допуњавање

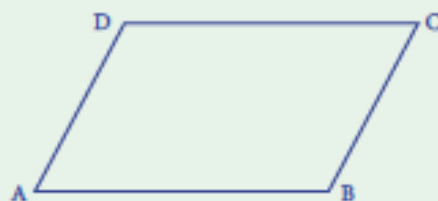


Задатак 4

На цртежу је дат паралелограм ABCD.
Одреди углове и странице ABCD?



Да ли је паралелограм ABCD осносиметрична 2Д-форма?
Објасни свој одговор.



Одговори на питања у својој свесци.

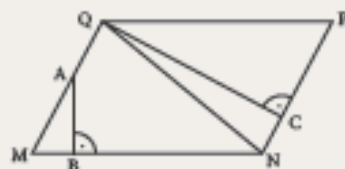
За питање/а са одговором ДА запиши објашњење и пример, а за питање/а са НЕ врати се на лекцију и прегледај одговарајући пример уз питање.

1. Могу да набројим својства паралелограма. ДА/НЕ
2. Могу да применим својства паралелограма у решавању проблема. ДА/НЕ
3. Како да побољшам своја знања о својствима паралелограма?

Самосталан рад

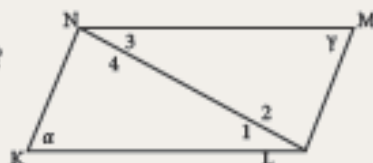
1. Четвороугао $MNPQ$ је паралелограм.
Именувај која од нацртаните отсечки е:

- а) негова дијагонала
б) негова висина

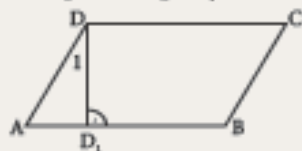


2. Нацртај паралелограм $ABCD$, а затим из темена D повуци висине.

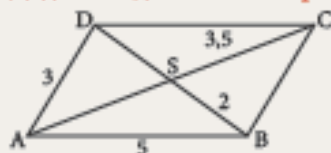
3. У паралелограму $KLMN$ на цртежу је повучена дијагонала. Шта може да се закључи за $\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$?
Објасни свој одговор.



4. У паралелограму $ABCD$, $\angle 1 = 42^\circ$. Израчунај углове тог паралелограма.

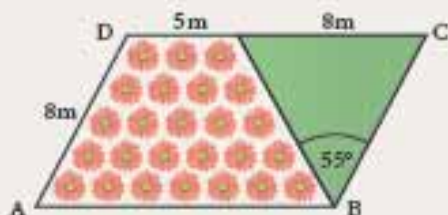


5. Четвороугао $ABCD$ је паралелограм. Нађи дужину дужи:
Дадение дужини се претставени во см.



6. Угао у темену M паралелограма $MNPQ$ је 106° .
Одреди остале углове паралелограма.

7. Пејзажни архитекта жели да уреди двориште у облику паралелограма које је подељено на два дела: цветњак у облику трапеза и троугаону травнату површину. Двориште треба да се огради оградавањем. За ту сврху, потребне су дужине страна и величине углова дворишта. Користећи цртеж, одреди тражене дужине и углове.



- 8.* У паралелограму $MNPQ$ ($\angle Q > 90^\circ$) су повучене висине на странице MN и NP .
Израчунај углове паралелограма ако је угао између повучених висина:

- а) 80° б) 45°

Врсте паралелограма и њихова својства

Паралелограм је четвороугао са два пара паралелних страна. Овај 2Д-облик је основни за разумевање многих других геометријских концепата и има широку примену у стварном животу, као и у различитим областима науке и технологије. У овој лекцији ћеш се упознати са различитим врстама паралелограма. Сваки од паралелограма има своје карактеристике и својства по којима се разликује од других, али сви они деле основна својства паралелограма. На пример, супротне стране су увек паралелне и једнаке, а супротни углови су такође једнаки. Током ове лекције ћемо истражити врсте паралелограма и забележити њихова специфична својства. Научићеш како да разликујеш паралелограме од других 2Д-облика и како могу да се примене њихова својства у решавању задатака и проблема.



Пример 1

Анализирај сваки цртеж појединачно и одговори на питања:

Две праве $a \parallel b$ се секу са другим паралелним правима $c \parallel d$ тако да $a \perp c$	
Две праве $a \parallel b$ се секу са другим паралелним правима $c \parallel d$ тако да $a \perp c$	
$a \parallel b$ се секу са друге две паралелне праве $c \parallel d$, $a \perp c$ и растојање између c и d је једнако са растојањем између a и b .	

- а) Да ли су четвороуглови паралелограми? Зашто?
- б) Какве углове има сваки од паралелограма?
- в) Какве стране има сваки од паралелограма?

Решење:

Четвороугао на првом цртежу је паралелограм, има два пара паралелних страна и сваки пар паралелних страна има једнаку дужину. Сви углови су прави углови.

Паралелограм у коме су сви углови прави зове се правоугаоник.

Четвороугао на другом цртежу је паралелограм, има два пара паралелних страна и супротни углови су му једнаки. Код овог паралелограма све стране су једнаке.

Паралелограм у коме су све стране једнаке зове се ромб.

Четвороугао је паралелограм, има два пара паралелних страна и сви углови су прави углови. Све стране су једнаке по дужини.

Паралелограм са једнаким странама и правим угловима зове се квадрат.

Често паралелограм који није правоугаоник и није ромб називамо ромбоид.

Задатак 1

Нека тачке P, Q, R и S на паралелограму ABCD буду средишта страна AB, BC, CD и DA редом. Направи цртеж, анализирај га и одговори ког је типа четвороугао PQRS.

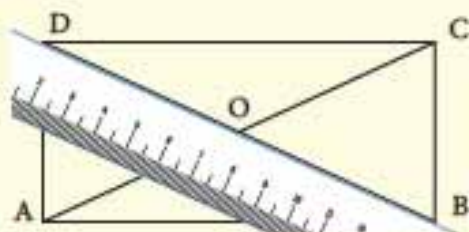
Пример 2

Цртај у својој свесци по следећим корацима:

1. Нацртај три различита правоугаоника.
2. У сваком правоугаонику повуци дијагонале и тачку пресека означи са O.
 - а) Измери дужину дијагонала у сваком правоугаонику и запиши је. Шта може да се закључи?
 - б) Врх шестара стави у тачку пресека дијагонала у сваком правоугаонику и отвориш га до једног од темена. Какву кружницу можеш да нацрташ?
 - в) Да ли ако један паралелограм има једнаке дијагонале, можеш да закључиш да је то правоугаоник? Објасни свој одговор.

Решење:

а)



б)



Ако си цртао прецизно и тачно, добићеш следећа својства правоугаоника:

У сваком правоугаонику, његове две дијагонале су једнаке међу собом.

Око сваког правоугаоника може да се опише кружница са центром у пресеку дијагонала.

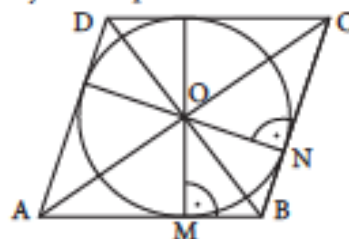
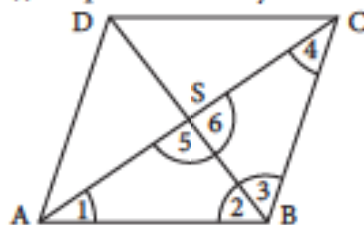
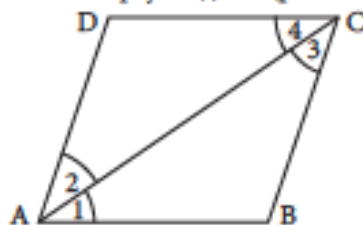
Ако су дијагонале једног паралелограма једнаке, онда је тај паралелограм правоугаоник.

Задатак 2

Да ли је правоугаоник осносиметрична 2Д-форма? Објасни свој одговор.

Пример 3

Анализирај следеће цртеже и одговори на питања у вези са својствима ромба:



- а) Зашто је $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$? Шта представља дијагонала AC за $\angle A$ и $\angle C$? Да ли исто може да се закључи и за другу дијагоналу?

Дијагонале ромба су симетрале супротних углова.

- б) Зашто $\triangle ABS$ и $\triangle CBS$ имају једнак облик и величину? Запиши парове углова који су једнаки међу собом. Колики је збир $\angle 5$ и $\angle 6$? Зашто $\angle 5$ и $\angle 6$ имају по 90° ? Какав угао заузимају дијагонале AC и BD?

У сваком ромбу дијагонале су међусобно нормалне.

в) Да ли је ромб осносиметрична 2Д форма? Објасни свој одговор.

Сваки ромб је осносиметрична 2Д форма са две осе симетрије, и то симетрале супротних углова.

г) Подсети се на уписану кружницу у троугао. Помоћу трећег цртежа датог изнад, објасни зашто може да се упише кружница у ромб.

У сваки ромб може да се упише кружница чији је центар у пресеку дијагонала.

Задатак 3

Ако у једном паралелограму дијагонале су међусобно нормалне, онда је то ромб. Објасни зашто.

Ако у једном паралелограму дијагонале су међусобно нормалне, онда је то ромб.

Зато што је сваки квадрат правоугаоник са једнаким странама (или ромб са правим угловима), сва својства која важе за правоугаонике и ромбове важе и за квадрате.

Задатак 4

Нацртај квадрат и повуци његове дијагонале. Затим уради потребна мерења и провери претходни закључак да за квадрат важе сва својства као за правоугаоник и за ромб. У сваком квадрату дијагонале су једнаке и међусобно нормалне.

Во секој квадрат дијагоналите се еднакви и заемно нормални.

Пример 4

Ана и Бојан желе да направе рам за слику димензија 40 cm и 30 cm. Они имају само дрвене штапиће које могу да секу и желе да се увере да ће рам бити правоугаон. Како могу да провере да ли је њихов рам правилно састављен користећи својства паралелограма?

Решење:

Ана и Бојан прво састављају рам димензија 40 cm и 30 cm, тако да су две дуге стране паралелне и једнаке, а две краће стране међусобно паралелне и једнаке.

Да би проверили да ли је рам правоугаоник, они ће повући дијагонале из супротних углова (из горњег левог у доњи десни угао и из горњег десног у доњи леви угао).

Затим ће леђиrom измерити дијагонале.

Ако су дијагонале једнаке, онда је рам правоугаоник.

Ако дијагонале нису једнаке, то значи да је рам искривљен и треба га кориговати тако да стране поново буду паралелне и једнаке дужине.

Овај метод се може користити не само за израду рамова, већ и за проверу исправности прозора, врата, столова или других правоугаоних објеката у свакодневном животу.

Задатак 5

Нацртај квадрат ABCD. Повуци дијагонале и симетрале страница.

- Шта се дешава са пресеком дијагонала и пресеком симетрала страница?
- Стави врх шестара у пресек дијагонала. Колико кружница можеш да нацрташ? Именуј сваку кружницу и означи њен центар и полупречник.

Сваки квадрат има уписану и описану кружницу са заједничким центром (пресек дијагонала).

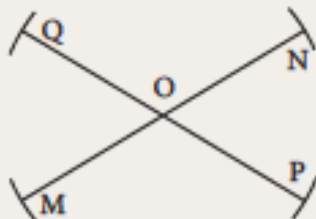
Да ли је квадрат оносиметрична 2Д форма? Објасни свој одговор.

Одговори у своју свеску на следећа питања да процениш колико си савладао градиво из лекције:

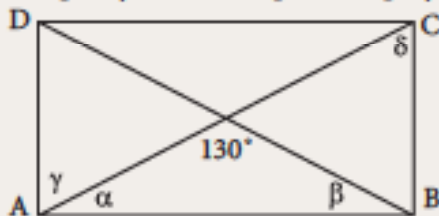
- Да ли могу да препознам и именујем све врсте паралелограма (правоугаоник, квадрат, ромб, ромбоид)?
 - Да ли могу тачно да опишем њихова својства (једнаке стране, углови, дијагонале)?
 - Да ли могу да објасним како се разликују правоугаоник, квадрат, ромб и ромбоид?
 - Да ли могу да решавам проблеме у којима се користе својства паралелограма?
- Допуни свој одговор примером или цртежом. Подели одговоре са својим школским друговима.

Самосталан рад

1. У ромбу ABCD тачке A1, B1, C1 и D1 су средине страна AB, BC, CD и DA редом. Какав паралелограм се добија повезивањем ових тачака?
2. а) Шта је правоугаоник?
б) Шта је ромб?
3. Дужи MN и PQ на цртежу су једнаке. Оне се преполовљују у пресечној тачки O и формирају паралелограм MPNQ. Да ли је он правоугаоник? Зашто?



4. Напиши заједничка својства квадрата и ромба.
5. За правоугаоник са цртежа израчунај означене углове.



6. Поброј заједничка својства квадрата и правоугаоника. По којим својствима се они разликују?
7. У ромбу ABCD угао између краће дијагонале и стране је 56° . Израчунај углове ромба.
- 8.* У столарској радионици израђују део намештаја од дрвета – држач за телевизор. Држач треба да буде у облику ромба чија је краћа дијагонала једнака страни ромба. Ради веће функционалности држача, треба поставити још један део у облику круга који ће додиривати сваку од страна ромба. Направи цртеж који ће у потпуности приказати дизајн држача. Одреди углове ромба.

Осна симетрија у координатном систему

Осна симетрија је пресликавање у равни када се један облик, по датом правилу, пресликава преко праве назване оса симетрије, тако да оригинал и слика изгледају идентично, као огледална слика. Овом лекцијом ћеш научити како да одредиш положај 2Д облика у координатном систему и како да упоредиш слику и оригинал при пресликавању. Такође, решаваћеш занимљиве проблеме о осној симетрији, што ће ти помоћи да разумеш како се ова појава користи у свакодневном животу, уметности и науци.

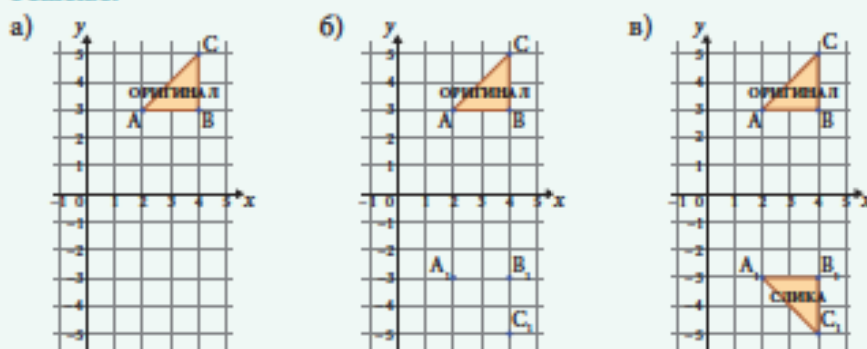


Пример 1

Нацртај координатни систем и поступи по следећим захтевима:

- Нацртај троугао $\triangle ABC$ у координатном систему. Темена имају координате $A(2, 3)$, $B(4, 3)$ и $C(4, 5)$.
- Одреди тачке A_1 , B_1 и C_1 симетричне теменима A , B и C троугла у односу на x -осу.
- Које су координате троугла $A_1B_1C_1$?

Решење:



- в) Координате темена слике троугла ABC су: $A_1(2, -3)$; $B_1(4, -3)$ и $C_1(4, -5)$.

Задатак 1

Нацртај координатни систем и поступи по следећим захтевима:

- Нацртај правоугаоник $PQRS$ у координатном систему, чија темена имају координате: $P(-3, 1)$, $Q(-3, 4)$, $R(-6, 4)$ и $S(-6, 1)$.

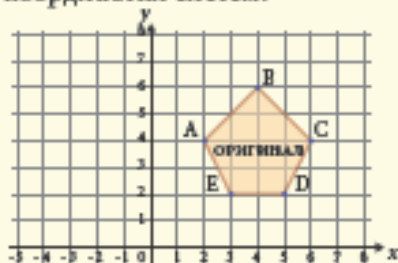
- б) Нацртај слику правоугаоника PQRS при осној симетрији са осом симетрије y -осом.
 в) Одреди координате темена новог правоугаоника $P_1Q_1R_1S_1$.

Пример 2

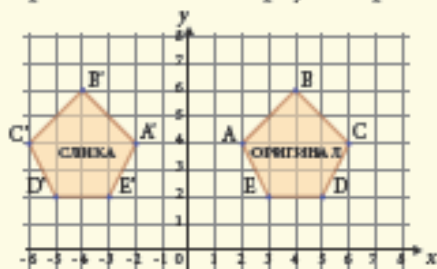
- а) Нацртај петаугао у координатном систему ако његова темена имају координате:
 $A(2, 4)$, $B(4, 6)$, $C(6, 4)$, $D(5, 2)$, $E(3, 2)$.
 б) Одреди слику петаугла ABCDE при осној симетрији са осом симетрије y -осом. Запиши координате слике сваког темена петаугла ABCDE.

Решење:

- а) Почни са уношењем координата сваког темена петаугла ABCDE у координатни систем:



- б) Примена осне симетрије на оригинал



Нове координате темена су:

$A(2, 4) \rightarrow A_1(-2, 4)$, $B(4, 6) \rightarrow B_1(-4, 6)$, $C(6, 4) \rightarrow C_1(-6, 4)$, $D(5, 2) \rightarrow D_1(-5, 2)$ и $E(3, 2) \rightarrow E_1(-3, 2)$

Слика петаугла је симетрична оригиналу у односу на y -осу, што значи да ће се координата x за свако теме заменити супротном вредношћу (ако је позитивна, постаће негативна и обрнуто), док ће координата y остати непромењена.

При овој осној симетрији слике темена петаугла налазе се са супротне стране y -осе, али на истом растојању од ње.

Питања за додатно размишљање:

- а) Шта ће се десити са петауглом ABCDE при осној симетрији са осом симетрије x -осом?
 б) Какве ће се промене догодити на координатама петаугла ако је оса симетрије права која пролази кроз тачку $E(0,1)$ и паралелна је са x -осом?

Задатак 2

- Нацртај шестоугао ABCDEF у координатном систему, са координатама: A(2, 6), B(4, 7), C(6, 5), D(5, 3), E(3, 3), F(2, 4).
- Одреди слику шестоугла ABCDEF при осној симетрији са осом симетрије у-осом. Запиши координате слике сваког темена шестоугла ABCDEF.
- Какве промене настају у координатама слике шестоугла?
- * Без да црташ, покушај да одговориш које би биле x -координате сваког темена слике шестоугла ABCDEF при осној симетрији у односу на праву која пролази кроз тачку F(-3, 0) и паралелна је са у-осом.

Пример 3

Ти си архитекта који треба да изради план за уређење дворишта са симетричним дизајном.

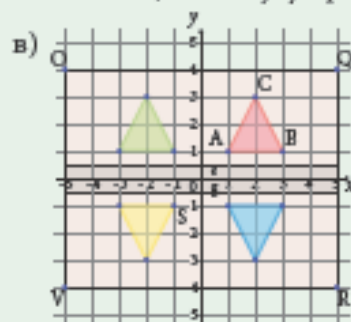
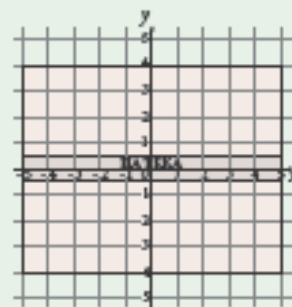
У дворишту треба да се поставе четири велике цветне леје у облику троуглова. Леје су распоређене симетрично у односу на стазу у дворишту.



- Коју осу из координатног система би изабрао према стази са датог цртежа?
- Изабери координате темена једне од цветних леја у облику троугла.
- Нацртај двориште са симетричним дизајном.

Решење:

- Најбоље и најједноставније за цртање би било ако изаберемо x -осу координатног система да се поклапа са стазом која је дата на цртежу. Међутим, у дворишту x -оса треба да буде на средини стазе. Зашто? На шта ћеш обратити пажњу при цртању у-осе? Колико је дуга стаза?
- Прва цветна леја нека буде у првом квадранту, троугао ABC са координатама A(1, 1), B(3, 1) и C(2, 3). На шта треба да обратите пажњу при избору координата темена троугла? Које су највећа и најмања могућа вредност x и y координата једног темена цветне леје у првом квадранту? Објасни свој одговор.



Задатак 3

Вера жели да постави четири огледала на један зид у свом козметичком салону. Притом треба да буду испуњени следећи услови:

1. Огледала да буду у облику квадрата.
 2. Дијагонала једног од огледала треба да буде нормална на ивицу пода.
 3. Код другог огледала страна треба да буде паралелна са ивицом пода.
- а) Направи свој распоред огледала у координатном систему користећи осну симетрију.
- б) Како можеш да добијеш композицију огледала тако да, на пример, у првом и другом квадранту координатног система буду огледала чија је дијагонала нормална на x -осу, а у трећем и четвртном квадранту буду огледала чија је страна паралелна са x -осом.

Како можеш да користиш осну симетрију да решиш реалне проблеме?

Да ли можеш да наведеш конкретан пример из свакодневног живота у ком симетрија игра важну улогу?

Одговоре на свако питање запиши у своју свеску. За свој одговор запиши пример ако си одговорио са ДА, а за одговоре Делимично и Не објасни зашто.

1. Да ли могу тачно да прочитам координате тачке по симетрији у односу на дату осу?
☐ Да ☐ Делимично ☐ Не
2. Да ли могу да одредим слику при осној симетрији на многоугао у координатном систему?
☐ Да ☐ Делимично ☐ Не
3. Да ли разумем како да применим осну симетрију у реалним ситуацијама (као у примеру са позиционирањем огледала и сл.)?
☐ Да ☐ Делимично ☐ Не
4. Шта могу да урадим да боље савладам градиво?
 (Напиши кратак одговор.)

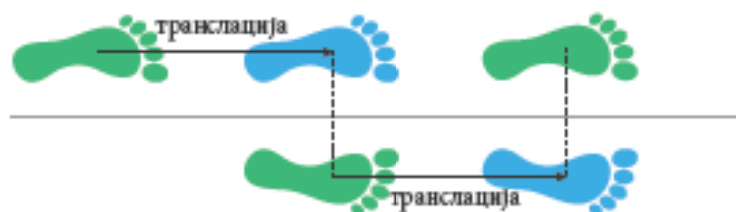
Самосталан рад

1. Градски парк има правоугаони базен чије су димензије дате у координатном систему. Темена базена су $A(2, 3)$, $B(6, 3)$, $C(6, -1)$ и $D(2, -1)$. Испланирај цветни аранжман симетричан базену у односу на y -осу и одреди координате цветног аранжмана.
2. У изради постера за догађај треба да се дизајнира симетричан елемент у облику троугла са теменима $A(-2, 1)$, $B(0, 4)$, $C(2, 1)$. Нацртај троугао и његову слику по симетрији у односу на x -осу.
3. Ако са тачкама $A(3, 1)$, $B(5, 1)$, $C(5, -1)$ и $D(3, -1)$ је одређен положај огледала, одреди координате његове слике при осној симетрији у односу на праву која пролази кроз тачку $M(0, -3)$ и паралелна је са x -осом.
- 4.* Врт има централни цветни аранжман у облику круга чији је центар у тачки $(4, 2)$, а радијус је 2 јединице. Испланирај симетричан круг у односу на x -осу, запиши координате центра и опиши нову позицију.
5. Прозор има облик квадрата са теменима $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 3)$ и $D(1, 3)$. Пронађи координате његове слике по осној симетрији у односу на праву која пролази кроз тачку $K(2, 0)$ и паралелна је са y -осом.
6. Под купатила је представљен координатним системом. Ако једна плочица има облик правоугаоника са теменима $A(-2, -1)$, $B(0, -1)$, $C(0, -3)$ и $D(-2, -3)$, одреди координате симетричне плочице у односу на y -осу.
- 7*. При рестаурацији пода у античком објекту археолози су приметили да су коришћене плочице чији дезен је симетричан у односу на две међусобно нормалне праве које су дате на цртежу. Они треба да открију почетни дезен плочице, али делови исте су поломљени или обрисани. Користи цртеж и помози археолозима да нацртају почетни дезен плочица које су коришћене од давнина.



Транслација у координатном систему

Транслација је померање 2Д-облика без промене његовог облика или величине. При транслацији, свака тачка 2Д-облика се помера у истом правцу и за исту удаљеност. Циљ ове лекције је да научиш како да одређујеш нове координате тачака многоугла транслацијом, да разликујеш оригинал и слику многоуглова и да решаваш математичке проблеме који укључују транслацију.

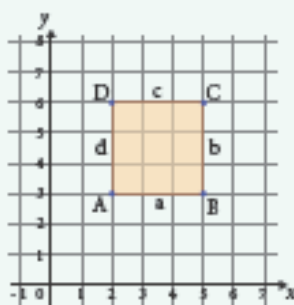


Пример 1

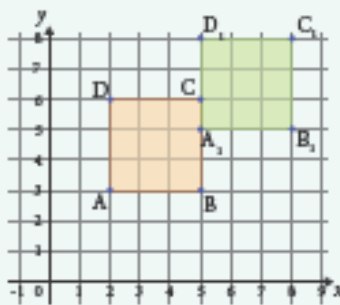
- У координатном систему нацртај многоугао са теменима $A(2, 3)$, $B(5, 3)$, $C(5, 6)$ и $D(2, 6)$.
- Изврши транслацију овог многоугла тако да се свака тачка помери за 3 јединице по оси x надесно и 2 јединице по оси y нагоре.
- Одреди координате темена слике након транслације.

Решење:

а)



б)



- Из координатног система могу се прочитати темена слике многоугла $ABCD$: $A_1(5, 5)$, $B_1(8, 5)$, $C_1(8, 8)$, $D_1(5, 8)$

Задатак 1

У координатном систему је дат петоугао са следећим координатама темена: $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(5, 5)$, $D(3, 7)$, $E(1, 6)$. Изврши транслацију петоугла тако да се свака тачка помери за 4 јединице надесно и 3 јединице надолу. Које ће бити нове координате темена добијеног петоугла након транслације?

Пример 2

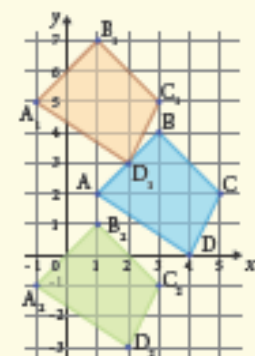
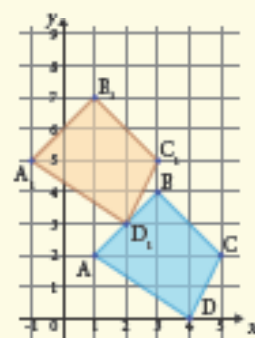
Дат је многоугао у координатном систему са следећим координатама темена:

$A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$ и $D(4, 0)$. Изврши транслацију овог многоугла тако да се свака тачка помери за 2 јединице налево и 3 јединице нагоре.

- Одреди координате темена слике многоугла $ABCD$ после транслације.
- Опиши промену координата сваке тачке (оригинал и слика). Које су разлике између координата оригинала и слике?
- Како би се промениле координате ако би транслација била у супротном правцу (на пример, 2 јединице налево и 3 јединице надолу)? Направи нову транслацију и одреди координате.
- Уместо да читаш координате темена слике многоугла $A_1B_1C_1D_1$, напиши како ћеш их израчунати за транслацију 2 јединице налево и 3 јединице надолу.
- Објасни значење речи „оригинал“ и „слика“ у контексту транслације. Како их идентификујеш у координатном систему?
- Реши следећи проблем са транслацијом: Ако имаш друге тачке $P(2, 3)$ и $Q(5, 6)$, а транслација треба да буде за 1 јединицу надесно и 4 јединице нагоре, које ће бити координате добијених тачака?

Решење:

- Из координатног система могу се прочитати координате слике многоугла $ABCD$ при транслацији 2 јединице налево и 3 јединице нагоре: $A_1(-1, 5)$; $B_1(1, 7)$; $C_1(3, 5)$; $D_1(2, 3)$
- Промена координата сваке тачке је у додавању 2 јединице налево и 3 јединице нагоре. На пример: за тачку $A(1, 2)$, нова тачка $A_1(-1, 5)$ има координате које се смањују за 2 по оси x и повећавају за 3 по оси y . Иста промена се дешава за све тачке многоугла.
- Ако је транслација за 2 јединице налево и 3 јединице надолу, x -координате слике биће исте као у првој транслацији, али у овом случају y -координата сваке тачке не се повећава, већ се смањује за 3, односно: $A(1, 2) \rightarrow A_2(-1, -1)$; $B(3, 4) \rightarrow B_2(1, 1)$; $C(5, 2) \rightarrow C_2(3, -1)$ и $D(4, 0) \rightarrow D_2(2, -3)$.
- Пошто је у овом случају транслација многоугла $ABCD$ за 2 јединице налево и 3 јединице надолу имамо: x -координате темена многоугла $A_2B_2C_2D_2$ су за 2 јединице мање од x -координата многоугла $ABCD$, а y -координате многоугла $A_2B_2C_2D_2$ су за 3 јединице мање од y -координата оригинала. Односно, $A(1, 2) \rightarrow A_2(-1, -1)$; $B(3, 4) \rightarrow B_2(1, 1)$; $C(5, 2) \rightarrow C_2(3, -1)$; $D(4, 0) \rightarrow D_2(2, -3)$.



д) У контексту translације:

Оригинал: Многоугао има координате темена пре него што се примени translација. Оне представљају почетни положај многоугла у координатном систему.

Слика: Нов многоугао са новим координатама темена после translације, када је многоугао премештен на нову позицију. Слика показује положај многоугла после translације.

У координатном систему оригинал је приказан тачкама на почетној позицији, а слика тачкама на новој позицији, после извршене translације.

- ђ) Translација тачака $P(2, 3)$ и $Q(5, 6)$ за 1 јединицу надесно и 4 јединице нагоре ће дати нове координате: $P(2, 3) \rightarrow P_1(3, 7)$ и $Q(5, 6) \rightarrow Q_1(6, 10)$. Објасни како су добијене координате тачака P_1 и Q_1 .

Задатак 2

Дат је шестоугао са координатама његових темена: $A(2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(6, 2)$, $D(7, 4)$, $E(5, 6)$ и $F(3, 5)$. Translација је задата са 3 јединице надесно и 2 јединице надоле.

- Одреди координате темена слике шестоугла после translације.
- Објасни промену координата сваког темена (оригинал и слика) при translацији. Како се мењају координате темена после translације?
- Измери лењиром дужину сваке стране оригиналног шестоугла, а затим у пореди са дужином одговарајуће стране шестоугла после translације. Да ли translација мења растојање између тачака?
- * Како би се промениле координате ако би translација била направљена за 3 јединице налево и 4 јединице нагоре? Без извођења translације, одреди које ће бити координате темена слике оригинала?

Пример 3

Ана ради у компанији за транспорт пакета. Она треба да израчуна нову локацију два пакета који се налазе на различитим позицијама у магацину. Када добије нову пошиљку, она треба да премести два пакета са истом translацијом. Почетне позиције пакета су дате координатама: пакет 1: $A(2, 3)$ и пакет 2: $B(5, 4)$. Translација која треба да се изврши је премештање за 6 јединица надесно и 2 јединице нагоре.

- Које ће бити нове координате пакета после премештања?
- Објасни како се израчунавају нове координате после translације пакета.
- Шта ће се десити са растојањем између пакета А и В пре и после translације?

Решење:

- Нове координате пакета: Да бисмо добили нове координате пакета, треба на x -координату да додамо 6, а на y -координату да додамо 2. То је због translације за 6 јединица надесно и 2 јединице нагоре.

За пакет 1 од тачке са координатама $A(2, 3)$ после транслагције биће у тачки $A_1(8, 5)$
 За пакет 2 од тачке са координатама $B(5, 4)$ после транслагције биће у тачки $B_1(11, 6)$

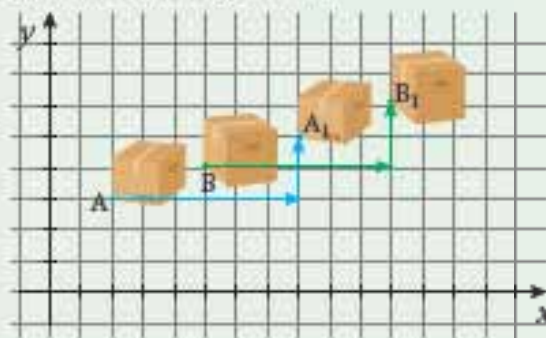
- б) Нове координате пакета А и В после транслагције:

На x -координату сваког пакета додајемо 3 (због померања по оси x , удесно).

На y -координату сваког пакета додајемо 2 (због померања по оси y , нагоре).

Ове промене се примењују на сваку тачку (пакет) да би се добила нова позиција после транслагције.

- в) Растојање између пакета остаје исто пре и после транслагције јер транслагција не мења удаљеност између тачака.



Транслагција пакета мења њихову позицију, али задржава растојање између њих.

Транслагција чува растојања.

Задатак 3

Тони, који ради као менаџер паркинг-гараже, треба да израчуна нови распоред аутомобила после транслагције. Аутомобили који су у гаражи треба да се помере да би се створило више слободног простора за нова возила.

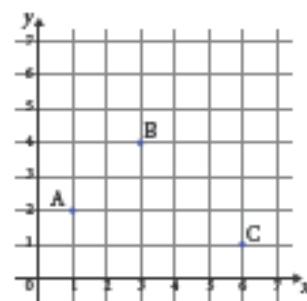
Почетне координате аутомобила у гаражи:

Аутомобил 1: $A(1, 2)$, Аутомобил 2: $B(3, 4)$,

Аутомобил 3: $C(6, 1)$.

Тони треба да премести аутомобиле за 2 јединице удесно и 3 јединице нагоре.

- а) Какве ће бити нове координате аутомобила после извршења транслагције?
 б) Објасни како се израчунавају нове координате аутомобила.



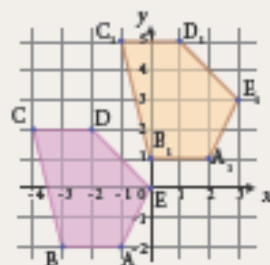
Како транслагација тачака у координатном систему утиче на геометријске објекте као што су многоуглови или облици из свакодневног живота? Објасни како транслагација може да се примени у задацима који укључују распоређивање или премештање објеката, као што је премештање аутомобила у гаражи или планирање распореда намештаја у просторији.

Одговори на питања у својој свесци. Одговор на свако питање објасни кроз пример и подели га са својим школским друговима.

1. Да ли јасно разумем и примењујем правила за транслагацију у координатном систему?
2. Да ли могу да одредим нове координате тачака и геометријских фигура после транслагације и да објасним како се мењају њихови положаји?
3. Да ли могу да објасним разлику између транслагације и осне симетрије?
4. Како сам применио транслагацију у решавању практичних проблема?

Самосталан рад

1. У координатном систему се налази троугао са координатама темена: $A(2, 3)$, $B(4, 6)$ и $C(6, 2)$. Ако се овај троугао помери за 4 јединице лево и 2 јединице нагоре, које ће бити нове координате три темена троугла?
2. Дат је квадрат у координатном систему са координатама темена: $A(1, 1)$, $B(1, 4)$, $C(4, 4)$, $D(4, 1)$. Примени транслагацију да помериш квадрат за 2 јединице десно и 3 јединице доле. Запиши нове координате квадрата.
3. Дата је права која пролази кроз тачке $P(2, 4)$ и $Q(5, 8)$. Ако примениш транслагацију на ову праву за 2 јединице лево и 2 јединице нагоре, које ће бити координате добијених тачака P_1 и Q_1 ?
4. Дата је слика паралелограма са теменима: $A_1(0, 0)$, $B_1(4, 2)$, $C_1(5, 5)$, $D_1(1, 3)$ добијена транслагацијом оригиналног паралелограма за 5 јединица десно и 1 јединицу нагоре. Запиши координате оригиналног паралелограма, пре транслагације.
- 5.* а) Које су координате оригинала, а које су координате слике?
 б) За колико је померен многоугао дуж x -осе, а за колико дуж y -осе?



Ротација многоуглова и примена

Ротација у датој равни једна је од основних геометријских трансформација која мења положај геометријских облика у датом координатном систему. У овој лекцији научићеш како да ротираш многоугао око дате тачке са начином на који се одређује нова позиција темена многоугла и примићеш како се мењају његове координате након ротације. Истраживаћеш основне принципе ротације, као што су угао ротације и смер, и примењиваћеш ове концепте за решавање практичних проблема из свакодневног живота.

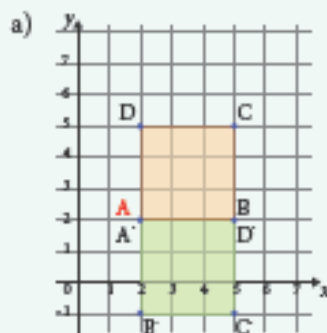


Пример 1

Дат је квадрат са координатама темена: $A(2, 3)$, $B(6, 3)$, $C(6, 7)$ и $D(2, 7)$.

- Ротирај квадрат за угао од 90° око темена A у смеру кретања казаљке на сату.
- Запиши координате квадрата $A'B'C'D'$, који је слика квадрата $ABCD$ при датој ротацији.

Решење:



- Нови квадрат (слика) након ротације за 90° око тачке A има координате темена: $A'(2, 3)$, $B'(2, -1)$, $C'(6, -1)$ и $D'(6, 3)$.

Задатак 1

Дат је петоугао $ABCDE$ са координатама: $A(1, 2)$, $B(3, 2)$, $C(4, 4)$, $D(2, 5)$ и $E(0, 4)$.

Ротирај петоугао за 90° у смеру супротном од кретања казаљке на сату око темена $A(1, 2)$.

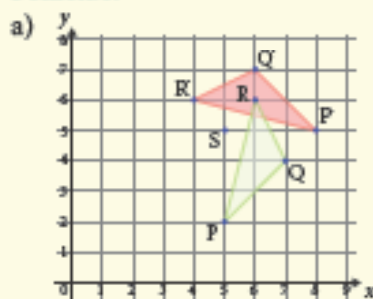
- Које су координате нових тачака B' , C' , D' и E' ?
- Какава је промена у положају петоугла након ротације?
- Да ли оригинал и слика имају исти облик и величину? Објасни зашто.

Пример 2

Тачке $P(5, 2)$, $Q(7, 4)$ и $R(6, 6)$ су темена троугла $\triangle PQR$.

- Ротирај $\triangle PQR$ око тачке $S(5, 5)$ за 90° у смеру супротном од кретања казаљке на сату.
- Одреди нове координате тачака P' , Q' и R' након ротације око тачке S за 90° степени.
- Измери дужину PQ и упореди је са дужином $P'Q'$. Шта примећујеш?
- Да ли троугао задржава свој облик и величину након ротације? Објасни.
- Какав је положај новог троугла у односу на почетни троугао?

Решење:



- Троугао који је слика након ротације има темена са координатама: $P'(8, 5)$, $Q'(6, 7)$ и $R'(4, 6)$.
- Може се приметити да је растојање између тачака P и Q исто као растојање између P' и Q' , односно $PQ = P'Q'$.
Исто важи за остала растојања између одговарајућих тачака.
Ротација задржава растојање између тачака.
- Троугао задржава свој облик и величину.
Ротација не мења дужину страница и не мења углове троугла.
Мења се само његов положај у координатном систему.
- Положај троугла који је слика након ротације је такав да изгледа као да је померен и ротирано постављен у односу на почетни.

Задатак 2

Дат је четвороугао ABCD са координатама: A(2, 3), B(4, 3), C(4, 5) и D(2, 5). Ротирај четвороугао за 90° у смеру кретања казаљке на сату око тачке S(1, -1).

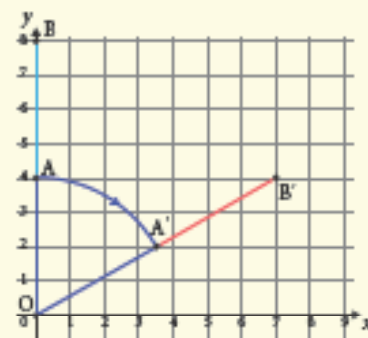
- Које су координате темена A', B', C' и D' након ротације ABCD?
- Да ли су оригинал и слика идентични по величини? Објасни зашто.

Пример 3

Дуж АВ ротирај за угао од 60° у смеру кретања казаљке на сату око тачке O(0, 0). Које су координате дужи A'B'?

Решење:

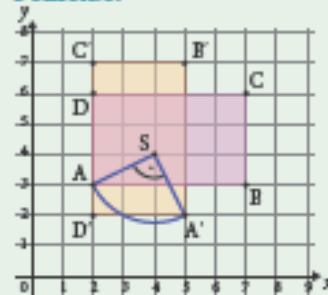
Прочитај и запиши координате крајњих тачака слике дужи АВ након ротације.



Пример 4

У плану за стазу у градском парку, архитекта има положај стазе у координатном систему. Стаза има облик правоугаоника са координатама темена A(2, 3), B(7, 3), C(7, 6) и D(2, 6). Архитекта жели да ротира стазу за 90° у смеру супротном од кретања казаљке на сату, око тачке S(4, 4), да би креирао нови изглед стазе. Одреди нове координате темена стазе након ротације.

Решење:



Из цртежа могу се прочитати координате нове стазе: A'(5, 2), B'(5, 7), C'(2, 7) и D'(2, 2).

Како ротација многоугла око дате тачке утиче на његов облик и његову величину? Да ли се при ротацији сви темени многоугла померају једнако и на исти начин? Објасни шта се дешава са позицијама темена многоугла када се ротирају за различите углове. Зашто је важно да се зна центар ротације када се ради са ротацијом у природним или географским контекстима? Истражуј.

Запиши у своју свеску: Да ли си задовољан/на разумевањем корака ротације? Објасни шта можеш да урадиш боље следећи пут.

Самосталан рад

Чиме је одређена једна ротација?

- Изврши ротацију $\triangle ABC$ са теменима $A(2, 3)$, $B(5, 5)$ и $C(4, 8)$ за угао од 90° у смеру супротном кретању казаљки на сату око тачке $S(4, 4)$.
 - Које ће бити нове координате темена A' , B' и C' након ротације?
 - Како ће се променити позиција троугла у односу на његово почетно место?
- Дат је правоугаоник са координатама $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(5, 4)$ и $D(1, 4)$. Ротирај правоугаоник за 180° око тачке која је пресециште дијагонала правоугаоника.
 - Одреди координате темена правоугаоника након ротације.
 - Каква је разлика у позицији правоугаоника пре и после ротације?
 - Како центар ротације који је пресециште дијагонала утиче на саму ротацију?
- Дат је многоугао са теменима $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$, $D(4, 0)$ и $E(2, 0)$. Ротирај многоугао за 270° у супротном смеру од кретања казаљки на сату око тачке $O(0, 0)$.
 - Одреди координате нових темена A' , B' , C' , D' и E' након ротације.
 - Како ова ротација утиче на распоред тачака у односу на почетну позицију многоугла?
 - Колико често се користи ротација око координатног почетка у геометријским проблемима и у којим случајевима? Истражуј.
- Троугао са координатама темена $A(2, 3)$, $B(6, 4)$ и $C(5, 7)$ ротирај за 30° у смеру супротном од казаљке на сату око његовог тежишта.
 - Која ће бити нова позиција троугла након ротације? Одреди координате слике троугла.
 - Како ће изгледати троугао након ротације у односу на његов почетни положај?

Представљање 3Д-форми у различитим пројекцијама

Ова лекција ће ти помоћи да научиш како да представљаш тродимензионалне форме (3Д-форме) гледане са различитих страна. Представљање објеката у простору је веома важно да би могао да разумеш и анализираш различите перспективе једне форме. Научићеш како да гледаш и да црташ 3Д-форме из три различите позиције: спреда, одозго и са стране.



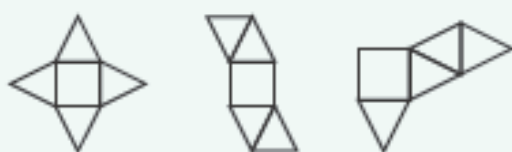
- Гледано спреда (фронтална пројекција) – ово је као да гледаш форму са предње стране, што ти показује висину и дужину објекта.
- Гледано одозго (планска пројекција) – ово је као да гледаш форму одозго, што ти помаже да видиш дужину и ширину објекта.
- Гледано са стране (профилна пројекција) – ово је као да гледаш форму са стране, што ти показује висину и ширину објекта.

Ово знање је основа за даље учење и биће ти корисно у различитим областима, као што су геометрија, архитектура и инжењерство.

Пример 1

Изради мрежу пирамиде са основом квадрат.

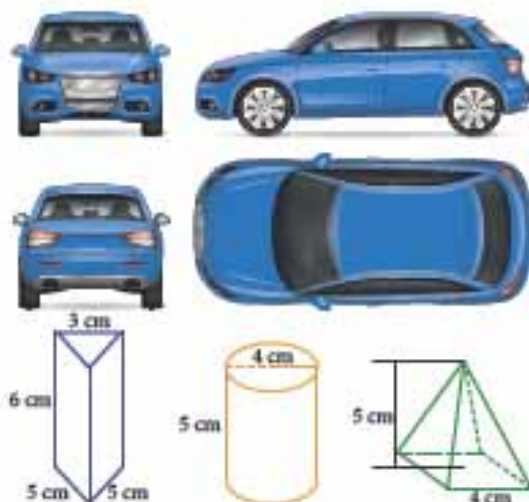
Решење:



У основи, добијање 2Д-цртежа којима представљамо 3Д-форму гледану са различитих страна (одозго, спреда, са стране) је једна врста пресликавања, односно ортогонално пројектовање. Ортогонална пројекција тачке на раван је пресециште нормале повучене кроз тачку ка датој равни.

Пример 2

Дате су три различите 3Д-форме: призма, цилиндар и пирамида. Твој задатак је да их прикажеш у три различите позиције гледања: одозго, спреда и са стране.



- Како изгледа призма када се гледа спреда, одозго и са стране?
- Како изгледа цилиндар када се гледа спреда, одозго и са стране?
- Како изгледа пирамида када се гледа спреда, одозго и са стране?
- Како се мења изглед ових форми при преласку из једне пројекције у другу?

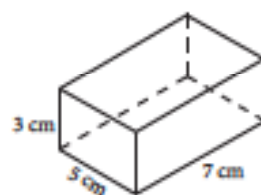
Решење:

На цртежима из овог примера дужина од 1 cm је представљена дужином од 1 квадратчића из квадратне мреже.



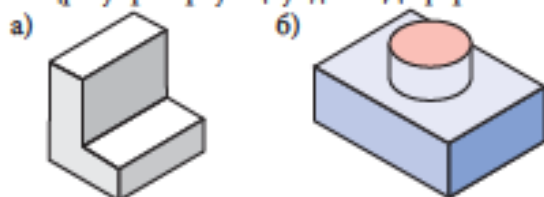
Задатак 1

Нацртај три пројекције паралелопипеда датог на цртежу.



Задатак 2

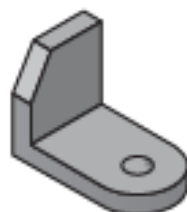
Нацртај три пројекције дате 3Д-форме.



Пример 3

Ти си машински инжењер који треба да пошаље упутства радионици за израду елемента за поправку неке машине. Упутства се састоје од цртежа у 3 пројекције са циљем прецизне израде траженог машинског елемента.

- Нацртај део у 3 пројекције.
- Одговори у којим другим областима из свакодневног живота, технике и науке има примене цртање 3Д-форми у 3 пројекције?

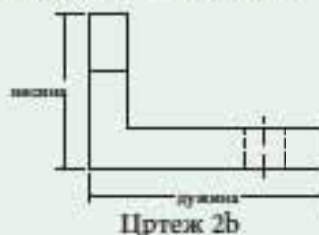


Решење:

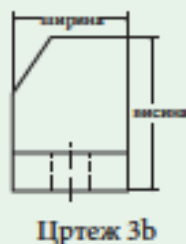
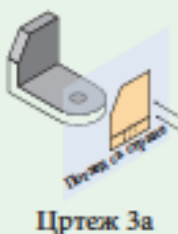
Пројекцију која се добија при погледу одозго или план добијамо када гледамо елемент (3Д-форму) одозго и цртамо 2Д-форму која се при томе добија. Ово је приказано на цртежу 1а. На цртежу 1б, пак, дата је прва пројекција (план) машинског елемента.



Пројекција која се добија када гледамо 3Д-форму спреда (фронтална пројекција) се добија на начин као што је приказано на цртежу 2.



Пројекција која се добија када гледамо 3Д-форму са стране (профилна пројекција) се добија на начин као што је приказано на цртежу 3.



- 2) Цртање 3Д-форми у 3 пројекције има широку примену у свакодневном животу, и то у архитектури, грађевинарству, машинству, уметности.

Задатак 3

Потребно је ново уређење твоје учионице. Нацртај постојећи план учионице, а затим предложи нов, водећи рачуна о функционалности инвентара у њој.

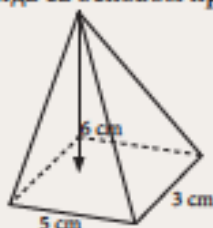
Да ли три пројекције које се користе за представљање 3Д-форме увек треба да се цртају у стварној величини? Наведи неколико примера да објасниш свој одговор.

1. Шта сам научио о начину представљања 3Д-форми?
2. Где имам тешкоће у разумевању или примени онога што сам учио у овој лекцији?
3. Шта могу да урадим да побољшам своје разумевање?

Самосталан рад

1. Нацртај у три пројекције:

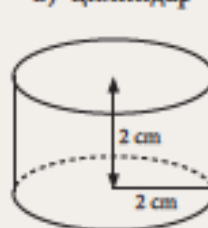
а) пирамида са основом правоугаоник



б) купа



в) цилиндар



2. Нацртај је у 3 пројекције дату 3Д-форму.



3. Нацртај их у 3 пројекције машинске делове

а)



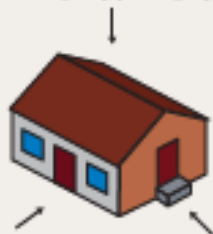
б)



в)



4. Нацртај у 3 пројекције објекат дат на слици.



5. Нацртај план и једну бочну пројекцију своје собе. На цртежу представи најмање 3 елемента намештаја.

Т Е М А

3

АЛГЕБРА

$$2 + 2 = ?$$



$$x - y = ?$$



Алгебра је као игра са загонеткама – користимо слова и једначине да откријемо који број се крије иза њих.

Припреми се да откриваш, да рачунаш и да размишљаш као прави математичар.

„Алгебра је као детективска прича – бројеви су трагови, а слова су тајне које треба да откријемо.“

„Математика је краљица наука, а алгебра је краљица математике.“

Резултати учења

Након проучавања ове теме бићеш способан/способна да:

- састављаш алгебарске изразе и формуле за решавање проблема из свакодневног контекста;
- састављаш и решаваш линеарне једначине са целибројним коефицијентима у датом контексту;
- генеришеш низове од целих бројева и визуелне приказе и да запишеш општи члан низа;
- представљаш проблеме из свакодневних ситуација са линеарним функцијама и да црташ њихове графиконе.

Основе алгебре.

Чланови, изрази и једначине

Алгебра је једна од основних грана математике која нам омогућава да радимо са бројевима, променљивама и математичким операцијама на апстрактнијем нивоу. Осим бројева, у алгебри користимо слова и симболе (на пример, x , y , a , b , $+$, $-$, ...) да представимо непознате вредности, што нам помаже да решавамо различите математичке проблеме.



У овој лекцији истраживаћеш три кључна елемента алгебре: чланове, изразе и једначине. Научићеш шта представљају чланови једног математичког израза, како да препознајеш и састављаш алгебарске изразе и једначине – које су основни алати за рачунање и моделирање стварних ситуација. Ова основа је важна јер је алгебра присутна у многим областима науке, технике, економије и свакодневног живота. Разумевање ових концепата ће ти помоћи да развијеш логичко размишљање и вештине за решавање проблема.

Пример 1

Марко жели да купи свеске и хемијске оловке. У књижари једна свеска кошта 50 динара, а једна хемијска 30 динара. Он је купио 3 свеске и 2 хемијске. Колико новца је потрошио Марко у књижари?

Решење:

Да би нашао укупни износ који је Марко потрошио, рачунаш $3 \cdot 50 + 2 \cdot 30 = 150 + 60 = 210$ динара.

Запис који си користио да израчунаш колико новца је Марко потрошио садржи бројеве и знакове за неке од операција које си већ учио. Тај запис представља бројни израз. Добијена вредност након извршавања свих операција у изразу зове се бројна вредност израза.

Задатак 1

Израчунај бројне вредности израза

- а) $120 - 17 + 78 : 3 + (60 - 400 : 10)$
- б) $88 + 24 : 6 - 48 + 2 \cdot 60$
- в) $((51 - 31) + 7) \cdot 5$

Пример 2

Ана и Бојан штеде новац сваког месеца. Ана штеди x динара месечно, а Бојан штеди 2 пута више од Ане.

- Колико новца штеди Бојан?
- Запиши израз за укупну уштеђевину Ане и Бојана.
- Ако су обоје заједно уштедели 9.000 динара, запиши једначину помоћу које можеш да израчунаш колико сваки од њих штеди.

Решење:

- Пошто Бојан штеди 2 пута више од Ане, то значи да је његова уштеђевина: $2x$
- Значи, укупна уштеђевина Ане и Бојана је: $x + 2x$
Чланови овог израза су x и $2x$.
Број (константа) испред променљиве у сваком члану назива се коефицијент тог члана. На пример, код члана $2x$ коефицијент је 2, а главна вредност x ; код члана x коефицијент је 1, а главна вредност такође x . Чланови x и $2x$ су слични јер имају исту главну вредност. Члан $-x$ је супротан од x .
- Према податку из задатка, њихова заједничка уштеђевина је 9000 динара, па имамо: $x + 2x = 9000$

Променљива је симбол (најчешће слово) који представља број који може да се мења или је непознат. На пример: $x, y, z, m, n, \dots$ су променљиве. Алгебарски израз је запис од бројева (константи) и променљивих повезаних на одговарајући начин знаковима за математичке операције.

Примери израза: $4x + 7, a^2 - 3a + 5, 4x + 3y - 7, 18m^3 - 5n^2 + p, \dots$

Изрази типа $4x + 7$, или $a^2 - 3a + 5$ су линеарни изрази јер је у њима сваки члан који садржи променљиву првог степена.

Два алгебарска израза од којих бар један садржи променљиву, повезани знаком « $\Rightarrow$ » формирају једначину.

Примери линеарних једначина:

$2x + 5 = 11, y - 4 = 0, 2a + 2b = 8, 2x - y = 3y + 25, \dots$

Задатак 2

Који од израза су линеарни?

- | | | |
|------------------|-------------------|---------------------|
| а) $4x + 3$ | б) $x^2 + 5x + 6$ | в) $3y^2 - 2xy + 4$ |
| г) $5a - 2b + 7$ | д) $2y + 10z - 3$ | е) $\sqrt{x} + 4$ |

Објасни зашто?

Задатак 3

Запиши три израза и три једначине. За сваки израз и једначину запиши њихове чланове.

Пример 3

Напиши израз који показује колико ћеш платити ако купиш три паковања млека, свако по m динара, и четири паковања сока, свако по s динара.

Решење:

Ако је цена 1 паковања млека m динара, а цена 1 паковања сока s динара, онда ћеш за 3 паковања млека платити: $3 \cdot m = 3m$

За 4 паковања сока ћеш платити: $4 \cdot s = 4s$

Укупна сума коју ћеш платити је: $3m + 4s$. Који су чланови израза?

Пример 4

Био си на пијаци и за 1 килограм јабука и 2 килограма поморанџи платио си 260 динара. Знаш да 1 килограм јабука кошта 80 динара, али не знаш цену 1 килограма поморанџи и желиш да је израчунаш. Како би ово представио једначином?

Решење:

Непознату цену 1 kg поморанџи означимо са x динара, онда ће 2 kg поморанџи коштати $2x$ динара. Цена 1 kg јабука је 80 динара, па ће израз за укупну суму која ће се платити за 2 kg поморанџи и 1 kg јабука бити $2x + 80$. Ова сума је, заправо, потрошених 260 динара, па коначна једначина гласи: $2x + 80 = 260$. Који су чланови једначине коју си написао?

Задатак 4

Састави једначину за следећи проблем: једна мајица кошта p динара. Ако купиш три мајице и панталоне за 1500 динара, потрошићеш укупно 3500 динара.

Задатак 5

Састави једначину за следећи проблем: 2 лименке сока од по 30 динара и 4 паковања грицкалица по y динара коштају 15 динара више од 7 паковања грицкалица.

Које су предности када користиш алгебарске изразе и једначине у свакодневном животу у поређењу са обичним рачунањем?

У својој свесци за ДА запиши пример, а за НЕ врати се на део лекције на који се односи тврдња и поново погледај пример/е.

1. Разумем шта значе појмови члан, израз и једначина. (Да/Не)
2. Могу да саставим алгебарске изразе користећи променљиве. (Да/Не)
3. Знам да саставим једначину за свакодневни проблем. (Да/Не)

Самосталан рад

1. Петар има x година. Његова сестра је 4 године млађа од њега. Састави израз који приказује њене године.
2. Збир два броја је 56. Ако је један од бројева x , састави израз којим се представља други број.
3. Наставница има s чоколада и жели равномерно да их подели на 5 ученика. Састави израз који приказује количину коју ће добити сваки ученик.
4. а) Ако је један број 3 пута већи од другог броја x , састави израз који представља већи број.
б) Ако је један број 4 пута мањи од другог броја y , састави израз који представља мањи број.
5. Један аутомобил троши u литара горива на 100 километара. Ако тим аутомобилом буде пређено 300 километара, састави алгебарски израз за укупну потрошњу горива.
6. У продавници си купио 4 килограма јабука по a динара за килограм и 2 килограма банана по b динара за килограм. Састави израз за укупну цену коју треба да платиш.
7. а) Састави израз којим ћеш представити колико кусура треба да добијеш када са новчаницом од 500 динара плаћаш 3 сока по x динара.
б) Састави израз којим ћеш представити колико кусура треба да добијеш када са новчаницом од 500 динара плаћаш 3 сока по x динара и 4 ђеврека по y динара.
8. Састави једначину којом ћеш приказати следећи проблем: збир два броја је 87, а један број је за 5 већи од другог.
9. Висина једне зграде је h метара, а друга зграда је 30 метара виша од ње. Ако је збир њихових висина 150 метара, састави једначину за одређивање висине.
10. Једна породица плаћа x динара за струју, што је три пута више од износа који плаћа за воду. Ако укупни трошкови за ова два рачуна износе 24 000 динара, састави једначину да нађеш износ који плаћају за воду.
11. Марко има основну месечну плату од p динара. Осим тога, добија бонус од 10% од плате и још 5 000 динара за додатни рад. Ако је укупно зарадио 51 200 динара, састави једначину да нађеш његову основну плату.

Поједностављивање линеарног израза. Израчунавање вредности

У овој лекцији ћеш научити како да користиш редослед алгебарских операција да би поједностављивао изразе, што је кључно за правилно решавање математичких задатака.

Прво, фокусираћеш се на сабирање сличних чланова, што је важан корак у процесу поједностављивања израза. Затим ћеш научити како да множиш изразе са константама испред заграда и како те операције утичу на коначан резултат.

Следеће, разматраћеш концепт израчунавања вредности израза са променљивама када су за њих дате конкретне вредности.

Ово ће ти помоћи да разумеш како се математика може применити за решавање реалних проблема и да развијеш вештине за тачна израчунавања.



Пример 1

Илир продаје три различите врсте воћа по следећим ценама:

килограм јабука кошта $4x$ динара,
килограм крушака кошта $3x$ динара,
килограм поморанџи $2x$ динара,
кеса за паковање воћа кошта 5 динара.

Састави алгебарски израз који представља укупну цену за куповину воћа од све три врсте које ће бити спаковано у кесу.

Решење:

Укупна цена ће бити представљена следећим алгебарским изразом:
 $4x + 3x + 2x + 5$.

Задатак 1

Марија је купила 2 књиге. Цена једне књиге је $2x$ динара, а за доставу књига платила је додатних x динара. Колико укупно динара треба да плати Марија за две књиге и доставу?

Пример 2

Поједностави линеарни израз из Примера 1 и израчунај вредност израза када $x = 10$.

Решење:

Поједностављивање израза значи да се изврше операције међу сличним члановима, односно да се саберу слични чланови са x ($4x$, $3x$ и $2x$):

$$4x + 3x + 2x + 5 = 9x + 5 - \text{поједностављен израз.}$$

За израчунавање вредности израза када $x = 10$, вредност 10 се уместо x уноси у израз и добијамо: $9x + 5 = 9 \cdot 10 + 5 = 90 + 5 = 95$.

Дакле, вредност израза $9x + 5$ када $x = 10$ је 95.

Пример 3

Поједностави следећи линеарни израз: $3 \cdot (2y + 4)$. Затим израчунај вредност израза када $y = 2$.

Решење:

Да би се поједноставио израз, прво треба да се ослободиш заграда и примениш алгебарске операције: $3 \cdot (2y + 4) = 6y + 12$

Израчунавање вредности израза када $y = 2$:

$$6y + 12 = 6 \cdot 2 + 12 = 12 + 12 = 24.$$

Пример 4

Поједностави израз: $-2 \cdot (3x + 5) - 4x + 3$ и израчунај његову вредност када $x = -3$.

Решење:

При поједностављивању израза, најпре се уклањају заграде, а затим се сабирају слични чланови:

$$-2 \cdot (3x + 5) - 4x + 3 = \underline{-6x} \underline{-10} \underline{-4x} \underline{+3} = -10x - 7$$

Сада у поједностављен израз уместо x се уноси вредност

$$-10x - 7 = -10 \cdot (-3) - 7 = 30 - 7 = 23.$$

Задатак 2

Поједностави изразе, а затим израчунај вредност израза за дату вредност променљиве/променљивих:

а) $4x + 3 - 2x + 7$, $x = 5$

б) $3a - 4a + 2a + 5$, $a = 3$

в) $2x - 7 + x - 9y + 7$, $x = 1$, $y = -1$

г) $4(x + 3) - 2(x - 1)$, $x = 2$

д) $2(y + 4) - 3(y - 2)$, $y = -3$

Пример 5:

Маријан је отишао да купи свеске и хемиске за нову школску годину. Цена једне свеске је t динара, а цена једне хемиске је p динара. Он је купио 3 свеске и 2 хемиске. Касније је одлучио да купи још 2 свеске и 1 хемиску.

- Састави алгебарски израз који показује укупну цену коју је платио Маријан.
- Поједностави израз.
- Израчунај укупну суму ако једна свеска кошта 80 динара, а једна хемиска 50 динара.

Решење:

- Састављање израза: $3t + 2p + 2t + p$
- Поједностављање израза: $3t + 2p + 2t + p = (3t + 2t) + (2p + p) = 5t + 3p$
- Израчунавање укупне суме, односно вредности израза за дате вредности променљивих: ако $t = 80$, $p = 50$, онда $5t + 3p = 5 \cdot 80 + 3 \cdot 50 = 400 + 150 = 550$ динара

Дакле, Маријан је потрошио 550 динара за свеске и хемиске.

Задатак 3

Александра тренира пливање. У прва 4 дана плувала је по d метара дужину. Затим, у наредна 3 дана, сваки дан је плувала по 5 метара више него у прва четири дана.

- Састави алгебарски израз који показује укупан број метара које је испливала за тих 7 дана.
- Поједностави израз.
- Израчунај укупан број испливаних метара ако је сваког дана у прва 4 дана плувала по 200 метара.

Зашто је важно да поштујемо редослед алгебарских операција при поједностављивању израза? Које кораке треба да следиш када решаваш сложен математички израз са заградама и различитим операцијама? Објасни процес. Како можеш да користиш алгебарске изразе у свакодневним ситуацијама, као што су куповина, спорт или планирање времена? Да ли је лакше најпре поједноставити алгебарски израз пре него што се израчуна његова вредност? Објасни зашто.

Препиши табелу у своју свеску и процени своје знање. Подели табелу са својим школским друговима.

	Потпуно разумем	Делимично разумем	Не разумем
Могу да поједноставим линеарни израз сабирањем сличних чланова.			
Могу да množим са константом испред заграда.			
Могу да израчунам вредност линеарног изрази за дату вредност променљиве.			

Самосталан рад

1. Поједностави израз:

- а) $3(2x + 4) - 5x$ б) $5(a - 2) + 3(2a + 1)$ в) $2(3m - 4) - 4(m + 5)$
 г) $4(2x - 3) + 5(1 - x)$ д) $5(2 - y) - 3(4y - 1)$

2. Израчунај вредност изрази:

- а) $4y - 7 + 2(y + 3)$ за $y = 2$ б) $7 - 3x + 2(4 - x)$ за $x = -1$
 в) $3(2k + 1) - 4(k - 2)$ за $k = 3$ г) $2(3p - 4) + 3(2 - p)$ за $p = 0$
 д) $6 - 2(3x - 4) + x$ за $x = 2$

3. Јован ради за странску фирму и зарађује 15 евра по сату. Напиши израз који представља његову месечну зараду ако ради x сати месечно. Израчунај његову месечну зараду ако ради 160 сати месечно.
4. Амра продаје ручно израђен накит. Једну огрлицу продаје за 25 евра. Напиши израз који представља месечни износ за x продатих огрлица. Израчунај месечни износ ако прода 50 огрлица месечно.
5. Алекса путује аутомобилом који троши 8 литара горива на 100 километара. Ако је путовање дуго 400 километара, а цена горива је x динара по литру, напиши линеарни израз који представља укупну цену горива за путовање. Израчунај укупну цену горива за пут од 400 km ако 1 литар кошта 80 динара.
6. У продавници цена једног производа је 15 евра. Напиши линеарни израз који представља укупну цену за x производа. Израчунај укупну цену ако купиш 10 производа.

7. Мерита жели да иде на путовање и има 200 евра. Сваког дана током путовања трошила би 30 евра на храну и 20 евра на превоз. Напиши израз који представља укупну потрошњу за x дана. Израчунај укупну потрошњу ако путовање траје 5 дана. Да ли би Мерити било довољно 200 евра?
8. Марија има месечни приход од 40 000 динара. Она троши 7000 динара за стан, x динара за одећу, $2x$ динара за превоз и $3x$ динара за храну месечно. Напиши израз који представља укупну потрошњу Марије и израз за остатак од месечног прихода. Израчунај укупну месечну потрошњу Марије ако за одећу троши 3.000 динара. Да ли ће Марија имати уштеђу у месецу када за одећу потроши 3.000 динара?
9. У ботаничкој башти је било у корена бегонија, 3 пута више лаванде, $3y - 4$ корена љубичица и жалфије 2 пута више него љубичица. Запиши израз колико је корена остало у ботаничкој башти ако се 7у корена осушило?

Формуле. Изражавање једне променљиве преко друге

Формуле су алати који ће ти омогућити лако и брзо решавање проблема. Када користиш променљиве, можеш да изразиш везе између различитих величина. У овој лекцији ћеш научити како да састављаш једноставне формуле и да изражаваш једну променљиву преко друге. Научићеш како да примениш та знања у свакодневним ситуацијама, као што су израчунавање цене, брзине или времена. Ове вештине се користе не само у математици, већ и у разним областима као што су физика, економија и инжењерство, где се често сусрећемо са ситуацијама које захтевају такве прорачуне.

$$\text{Време} = \frac{\text{Растојање}}{\text{Брзина}}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Пример 1

Ако Димитар чита 20 страница дневно, напиши израз који представља број страница које ће Димитар прочитати за x дана.

Решење:

Број прочитаних страница за x дана дат је изразом: $20x$. Ако укупан број прочитаних страница обележимо са B , добијамо да је $B = 20x$.

Пример 2

Петар је 23 године старији од Селме. Петар има p година, а Селма има s година. Састави формулу која повезује године s и p .

Решење:

Ако године запишемо алгебарски, са датим словима, односно променљивим, имамо: $p = s + 23$. Ова формула даје везу између година Петра и Селме.

Формула је прецизан начин повезивања променљивих одговарајућим математичким операцијама за дату ситуацију (задатак). Формуле се често користе за изражавање општих правила или законитости у математици, у другим наукама, па чак и у свакодневном животу.

Пример 3

Једна књига кошта 170 динара, а један часопис кошта 50 динара. Напиши формулу за укупну цену s , у динарима, коју треба платити при куповини x књига и y часописа.

Решење:

Укупна цена = укупна цена књига + укупна цена часописа.

Укупна цена књига је $170 \cdot x = 170x$.

Укупна цена часописа је $50 \cdot y = 50y$.

Формула за укупну цену гласи: $S = 170x + 50y$.

Пример 4

Изрази страну једнакостраничног троугла a преко периметра L .

Решење:

Периметар једнакостраничног троугла: $L = 3a$. Ако желимо да изразимо страну преко њене везе са периметром, добијамо $a = \frac{L}{3}$. Ако је дат периметар троугла, на пример $L = 75$ cm, онда страна: $a = \frac{75}{3} = 25$ cm.

Задатак 1

Године мајке су збир година сина и ћерке. Запиши формулу која изражава године мајке преко година сина и ћерке. Затим изрази године сина преко година мајке и сестре.

Задатак 2

Состави формулу за периметар L на рамнокрак триаголник со основа a и крак b , а потоа:

- изрази основу преко осталих променљивих у формули,
- изрази крак преко осталих променљивих у формули.

Пример 5

Лука путује таксијем до аеродрома, али није сигуран да ли ће имати довољно средстава за превоз. Он зна да такси-компанија наплаћује фиксни трошак (старт) од 80 динара и 50 динара по пређеном километру. Ако је број пређених километара означен са k , а укупна цена за превоз са C :

- запиши формулу по којој се израчунава укупна цена за превоз C ,
- изрази број километара k преко осталих променљивих у формули,
- да ли ће Луки бити довољно 4.000 динара за превоз ако треба да пређе 70 километара таксијем до аеродрома?

Решење:

- Укупна цена за превоз = трошак старта + трошак за пређене километре.
Трошак за пређене километре = цена по 1 км · број километара = $50 \cdot k$.
Коначно: $C = 80 + 50k$.
- Да бисмо изразили број километара k , прво одузимамо 80 са обе стране формуле:
 $C - 80 = 80 + 50k - 80 \rightarrow C - 80 = 50k$. Затим делимо са 50: $k = \frac{C-80}{50}$.
- Питање је: колико километара Лука може да пређе са 4000 динара?
У формулу убацујемо $C = 4000$: $k = \frac{4000-80}{50} = \frac{3920}{50} = 78,4 \text{ km} > 70 \text{ km}$
Значи, Лука има довољно новца да плати такси до аеродрома.
(Други начин: колико пара је потребно за 70 km:
 $80 + 70 \cdot 50 = 80 + 3500 = 3580 < 4000$)

Задатак 3

У једној компанији за производњу кошуља цена једне кошуље је 800 динара, а фиксни трошкови за производњу кошуља износе 12.000 динара месечно. Напиши формулу која представља укупну месечну суму C (у динарима) за производњу x кошуља. Затим изрази променљиву x преко C .

Задатак 4

Формула за израчунавање површине квадрата је $P = a^2$, где је P површина, а је дужина странице. Изрази страницу a преко површине P . Затим, ако је $P = 49 \text{ cm}^2$, израчунај страницу квадрата.

У твоју свеску за ДА запиши пример,

а за НЕ се врати на део лекције на који се односи тврдња и поново прегледај пример(е).

1. Знам да саставим једноставне формуле. (Да/Не)
2. Могу да изразим једну променљиву преко друге у формули. (Да/Не)
3. Разумем формуле и њихову примену у свакодневним ситуацијама. (Да/Не)

Самосталан рад

1. Замисли да купујеш неколико килограма јабука. Ако је цена за 1 kg c , а купујеш k килограма, како ћеш израчунати укупну цену? Напиши формулу која приказује везу између укупне цене (C), цене за 1 kg (c) и количине (k).
2. У једном воћњаку било је 30 сандука са садницама стабала. У сваком сандуку било је по x стабала. Због лоших временских услова и неблаговремене заштите, сваке седмице се суше по 3 стабла. Састави формулу којом се израчунава укупан број здравих стабала V након m седмица.
3. Путујеш аутомобилом. Формула за брзину је: $v = \frac{s}{t}$, где је v брзина, s растојање, а t време. Изрази време (t) преко растојања (s) и брзине (v).
4. У хемијској реакцији температура супстанце се повећава сваки сат за 2°C . Ако је почетна температура T_0 , напиши формулу која представља температуру T после x сати. Затим изрази променљиву x преко T .
5. У једној фарми број животиња се сваког месеца повећава за 12. Ако је почетни број животиња N_0 , напиши формулу која представља број животиња N након x месеци. Затим изрази променљиву x преко N .
6. Енес је изнајмио штанд за продају сувенира. Фиксни трошкови за изнајмљивање штанда износе 1500 динара месечно, а зарада коју има Енес за сваки продати сувенир је 20 денара.
 - а) Напиши формулу која представља зараду C (у динарима) Енеса од продаје x сувенира.
 - б) Изрази променљиву x преко C .
 - в) Колико најмање сувенира мора да прода Енес да би могао да плати фиксне месечне трошкове?
7. Изрази дужину a правоугаоника:
 - а) из формуле за обим: $L = 2a + 2b$
 - б) из формуле за површину: $P = a \cdot b$

Линеарна једначина са једном непознатом.

Решење једначине

У свакодневном животу често се сусрећеш са ситуацијама у којима треба да израчунаш непознату вредност, на пример: колико новца ти недостаје да купиш нешто, колико времена ће ти бити потребно да стигнеш до неке дестинације, колико јединица неког производа треба да купиш да би потрошио одређену суму и слично. Наведени проблеми могу да се реше помоћу линеарних једначина.

$$\begin{aligned} \text{🍌} + \text{🍌} + \text{🍌} &= 21 \\ \text{🍌} + \text{🍌} + \text{🍌} &= 13 \\ \text{🍌} + \text{🍌} + \text{🍌} &= 18 \\ \text{🍌} - \text{🍌} + \text{🍌} - \text{🍌} &= ? \end{aligned}$$

Пример 1

а) Дата је једначина $2x + 5 = 11$. Провери за које вредности x из скупа $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ једначина прелази у тачно бројчану једнакост.

Решење:

Директном заменом сваке од вредности за x из скупа добија се 5 различитих бројчаних једнакости, од којих је само једна тачна. За ту вредност x кажемо да је решење једначине $2x + 5 = 11$.

Вредност за x	Бројчано једнакост	Тачно/нетачно	Решење
$x = -1$	$2 \cdot (-1) + 5 = 11$	нетачно	Не
$x = 0$	$2 \cdot 0 + 5 = 11$	нетачно	Не
$x = 1$	$2 \cdot 1 + 5 = 11$	нетачно	Не
$x = 2$	$2 \cdot 2 + 5 = 11$	нетачно	Не
$x = 3$	$2 \cdot 3 + 5 = 11$	тачно	Да

Вредност променљиве за коју једначина прелази у тачно бројно једнакство назива се решење једначине

Задатак 1

Провери да ли:

а) $x = 3$ је решење једначине $3x + 10 = 1$

в) $x = 2$ је решење једначине $x^2 = 4$

б) $x = -2$ је решење једначине $x^2 = 4$

г) $x = -\frac{2}{3}$ је решење једначине $3 - 5x = x + 7$

Задатак 2

За које вредности x бројчана вредност израза $x - 1$ је једнака:

- а) 0 б) 5 в) -6

Пример 2

Решите једначину: $7x + 4 = 9 - 3x$.

Решење:

При решавању линеарних једначина користимо инверзне операције, при чему једначину доводимо у решен облик облика $x = a$.

У конкретном случају, најпре на обе стране једначине додајемо $3x$, затим одузимамо 4 и на крају делимо са 10.

$$7x + 4 = 9 - 3x \quad | +3x$$

$$7x + 4 + 3x = 9 - 3x + 3x$$

$$10x + 4 = 9 \quad | -4$$

$$10x + 4 - 4 = 9 - 4$$

$$10x = 5 \quad | : 10$$

$$x = 5 : 10$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Како ћеш проверити да је $x = \frac{1}{2}$ решење једначине $7x + 4 = 9 - 3x$?

Пример 3

Решите једначину: $2(x - 3) + 4 = 10 - 3(x - 1)$.

Решење:

Прво се ослобађамо заграда, а затим поступамо слично као у претходном примеру

$$2(x - 3) + 4 = 10 - 3(x - 1)$$

$$2x - 6 + 4 = 10 - 3x + 3$$

$$2x - 2 = 13 - 3x \quad | +3x + 2$$

$$2x + 3x = 13 + 2$$

$$5x = 15 \quad | : 5$$

$$x = 3$$

Објасни зашто.

Задатак 3

Решите једначине и направи проверу решења:

а) $7x + 4 = -38$

б) $3(2x - 4) = 5x + 1$

в) $3(x + 1) + 5 = 8 - 2(x - 5)$

Пример 4

Мартина има 250 динара и жели да купи неколико паковања грицкалица. Једно паковање грицкалица кошта 40 динара. Она жели да израчуна колико паковања може да купи ако након куповине треба да јој остане 30 динара за аутобуску карту.

Решење:

Задатак ћемо решити најпре састављањем једначине, а затим и њеним решавањем.

Нека је x број паковања који треба да одредимо. Према условима задатка, за x паковања грицкалица укупна сума коју ће потрошити Мартина је $40x$, а остатак је 30 динара.

Пошто је у почетку имала 250 динара, можемо саставити следећу једначину: $250 - 40x = 30$.

Следећи корак је решавање једначине да бисмо одговорили на питање колико паковања грицкалица може да купи Мартина.

$$250 - 40x = 30 \quad | -250$$

$$-40x = 30 - 250$$

$$-40x = -220 \quad | : (-40)$$

$$x = 5,5$$

За број паковања из једначине добијамо 5,5, али пошто Мартина не може да узме пола паковања, она ће купити 5 паковања. На крају ће јој остати: $250 - 40 \cdot 5 = 50$ динара, па ће на тај начин сигурно имати новца и за аутобуску карту.

Задатак 4

Једна школа организује излет, а цена превоза по ученику је 300 динара. Поред тога, за све ученике треба да се плати и укупна фиксна сума од 5000 динара за водича. Укупна сума која треба да се плати за излет је 23 000 динара. Колико ученика ће ићи на излет?

Како можеш да препознаш када се неки проблем из стварног живота може решити линеарном једначином? Да ли решење једначине увек има смисла у стварном контексту? Објасни са примером. Можеш ли да смислиш други пример из свакодневног живота где ћеш користити линеарну једначину да израчунаш непознату вредност? Како можеш да провериш да ли је твоје решење једначине тачно?

Одговори на питања у свесци. Подели одговоре са својим школским друговима.

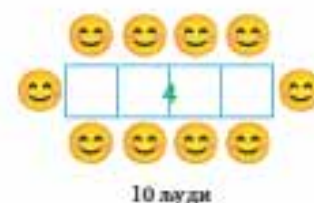
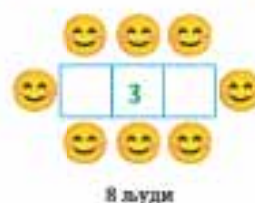
1. Размисли: Да ли могу да саставим линеарну једначину за проблем из свакодневног живота?
2. Реши: Да ли знам да решавам једначину корак по корак?
3. Провери: Да ли могу да проверим тачност свог решења заменом?
4. Примени: Могу ли да смислим свој проблем који се решава линеарном једначином?

Самосталан рад

1. Дата је једначина: $5x - 7 = 18$. Да ли је $x = 5$ решење једначине?
- 2*. Реши једначине: а) $2x + 5 = 3x - 7$ б) $0 \cdot y + 9 = 0$ в) $0 \cdot z + 0 = 0$
3. Ана и Бојан заједно имају 56 књига. Ана има 8 књига више од Бојана. Запиши једначину која представља овај проблем.
4. Лирим је замислио број такав да када га помножи са 3, а потом дода 5, резултат је 20. Који број је Лирим замислио?
5. Марко је купио 4 кутије са бомбонама, у свакој кутији је по x бомбона. Потом је појео 6 бомбона и остало му је 34. Колико бомбона је било у свакој кутији?
6. У једном ресторану цена пице и сока је укупно 540 динара. Ако пица кошта три пута више од сока, колико кошта сок?
7. Периметар правоугаоника је 48 cm. Дужина је три пута већа од ширине. Колике су дужина и ширина правоугаоника?
8. У игри са лоптом, Јанко и Славко су договорили следећа правила: за сваки погодак у кош добијају 3 поена, а за промашај губе 2 поена. Јанко каже да је Славко освојио 33 поена после 16 покушаја, али не зна колико пута је погодио, а колико промашио. Помози им да реше проблем (састави једначину, реши је и провери да ли је твоје решење тачно).
9. Плаћаш месечни пакет за телефон од 1000 динара, а свака минута разговора преко пакета наплаћује се 5 динара. Ако је рачун за овај месец 1150 динара, колико минута си разговарао преко пакета? Састави једначину, реши је и објасни кораке.
10. У једној продавници, јакна и панталоне заједно коштају 6500 динара. Јакна кошта 500 динара више од двоструке цене панталона. Колико кошта сваки производ?
11. Андреј је купио 3 пара спортских патика и један ранац. Сваке патике коштају исто, а ранац је 800 динара скупљи од двоструке цене једног пара. Ако је платио укупно 14600 динара, колико кошта један пар патика?
12. Михаела је путовала возом и аутобусом. Растојање које је прошла аутобусом повећано за 80 километара је три пута мање од растојања које је прошла возом. Ако је укупно прошло 560 km, колико километара је прошла са сваким превозом?
13. У једном фабричком резервоару има 120 литара воде. Сваког сата у њега улази три пута више литара него што истиче, а поред тога, сваки сат се додатно додаје 40 литара. Ако после 6 сати резервоар садржи 900 литара, колико литара воде улази и истиче сваки сат?

Низови целих бројева

Замисли да организујеш рођенданску забаву, организујеш простор и треба да пресметаш колико гостију може да седе око 4 спојена стола, 5 столова... (као што је приказано на слици). Постоји ли веза између броја спојених столова и броја столица око њих? Постоји ли веза између сваког наредног реда столице са претходним? У овој лекцији ћеш учити како да уређујеш бројеве и цртеже, да откријеш како функционише редослед бројева или цртежа. Истраживаћеш како се добија сваки следећи број или визуелни приказ, шема у датој низи и како да пронађеш који број стоји на одређеној позицији.



Пример 1

Амин штеди сваки дан. Првог дана је уштедела 5 динара, другог дана имала је 10 динара, а трећег дана њена штедња је била 15 динара. Ако настави тако сваки дан, колико ће укупно динара имати уштедено петог дана?

Решење:

Примећујемо да Амин сваки дан додаје по 5 динара на претходни износ:

- Први дан: 5 динара
- Други дан: 10 динара ($5 + 5$)
- Трећи дан: 15 динара ($10 + 5$)
- Четврти дан: 20 динара ($15 + 5$)
- Пети дан: 25 динара ($20 + 5$)

Дакле, петог дана Амин ће имати 25 динара.

Овај начин писања бројева у одређеном редоследу ће ти помоћи да разумеш шта је низа и како можеш да откријеш њене чланове.

Задатак 1

Број са кораком 4, почевши од: а) -5 б) -2 в) 1 .

Који ће бити 6-ти члан?

Пример 2

Дадени се бројевите: 5, 8, 11, 14, 17, ...

- Који је седми број?
- Које је правило којим се одређује сваки следећи број?

Решење:

- Први број (a_1): 5,
 други број (a_2): $5 + 3$,
 трећи број (a_3): $5 + 3 + 3$,
 четврти број (a_4): $5 + 3 + 3 + 3$,
 пети број (a_5): $5 + 3 + 3 + 3 + 3$,
 шести број (a_6): $5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$,
 седми број (a_7): $5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$.
 Дакле, седми број је 23.

Поређани бројеви или цртежи (шеме) који су повезани одређеним правилом називају се низа. Бројеве, шеме или визуелне приказе (цртеже) у низи називамо члановима низе.

Бројеве у низи означавамо са $a_1, a_2, a_3, \dots$ где индекс (мали број десно од слова a) показује на коју позицију члан припада у низи.

- Сваки члан низе 5, 8, 11, 14, 17, ... је за 3 већи од претходног. Значи, бројеви се добијају додавањем 3.

Правило за одређивање следећег члана низе је „додај 3“.

Можеш приметити да се сваки наредни члан низе добија додавањем 3, више пута.

Ако члан који је n -ти по реду у низи, односно n -ти члан означимо са a_n , можемо записати да је $a_n = 5 + 3 \cdot (\text{број додатих тројки})$. Из примера под а) видимо да се другом члану додаје једна тројка, трећем два пута тројка, четвртом три пута тројка итд.

Значи, n -тог члана додаје се $(n - 1)$ пута тројка. Можемо записати формулу за одређивање сваког члана (општи члан) низе: $a_n = 5 + 3 \cdot (n - 1)$. Можемо проверити да ли формула функционише. За седми члан под а) добили смо да је 23.

По формули: $a_7 = 5 + 3 \cdot (7 - 1) = 5 + 3 \cdot 6 = 5 + 18 = 23$.



Задатак 2

Орхан је одлучио да штеди новац сваке недеље. Прве недеље је уштедео 50 динара, друге недеље 80 динара, треће 110 динара, четврте 140 динара и тако даље.

- Колико новца ће уштедети осме недеље ако настави да штеди по датом правилу?
- Колико ће укупно новца имати уштедено после десет недеља?
- Напиши формулу по којој ће се моћи израчунати колико ће Орхан уштедети у било којој недељи.
- Како би ово изгледало визуелно ако представимо са редовима новчића?

На слици је приказано редење столица око правоугаоних столова са њиховим спајањем. Колико столова треба спојити да би могло да седне 30 гостију?



У твојој свесци за ДА запиши пример, а за НЕ врати се на део лекције на који се односи тврдња и поново разгледај пример/е.

Могу да одредим чланове низе по датом правилу. а) Да б) Не

Могу да нађем члан на датој позицији. а) Да б) Не

Могу да нађем правило за низу са целим бројевима. а) Да б) Не

Самосталан рад

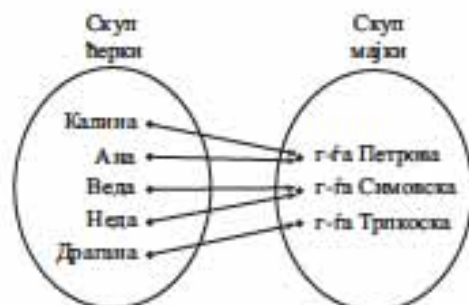
- Низа бројева која се појављује на бројанику лифта у једној згради је 0, 3, 6, 9, 12, ...
 - Одреди по којем правилу је састављена низа.
 - Ако је највиши спрат у згради 74, да ли ће он бити написан на бројанику лифта? Да ли су сви спратови у згради приказани на бројанику?
 - Запиши нову низу бројева која се појављује на бројанику лифта, почевши од подземне гараже која је означена са -2 и правило низе које сам одредиш.
- За сваку од низа:
 - 69, 62, 55, 48, ... б) -17, -13, -9, -5, ...
 - 11, 7, 3, -1, ... г) -5, -8, -11, -14, ...
 запиши правило за одређивање следећег члана низе и запиши следећа три члана



3. Сваког дана у школској трпезарији додаје се 10 obroka више. Првог дана има 50 obroka.
 - а) Запиши низу за првих пет дана.
 - б) Запиши општи члан низе.
4. Твоја омиљена видео игра има нивое који се повећавају по тежини према низи: 3, 10, 17, 24, ...
 - а) Пронађи правило по коме се повећава тежина нивоа видео игре.
 - б) Осмисли нов начин повећања тежине који би био изазов, али праведан изазов.
5. Алекс жели да постави светла поред стазе у парку. Прво светло је на 3 метра од почетка, друго на 7 метара, треће на 12 метара, четврто на 18 метара.
 - а) Да ли ова низа има логично правило?
 - б) Да ли су раздаљине између светала оптималне?
 - в) Како би променио распоред да би стаза била равномерно осветљена?
6. У једној видео игри играч скупља златне новчиће. Број новчића које добија у сваком следећем нивоу прати низу: 2, 6, 12, 20, 30, ...
 - а) Можеш ли открити како се повећава број новчића у сваком следећем нивоу?
 - б) Колико новчића ће играч добити у шестом нивоу?
 - в) Напиши опште правило по коме може да се израчуна број новчића у било ком нивоу.
7. Измисли своју интересантну низу која ће се користити за рачунање награда у игри, скупљање бонуса или расподелу награда на турниру. Објасни зашто је баш та низа добра и како си је направио фер за све учеснике.
8. Запиши правило за општи члан низе 2, 4, 8, 16.
9. Запиши правило по коме се одређује општи члан низе:
 - а) 
 - б) 
 - в) 

Презентовање једноставних функција

Математички концепт функције је моћан алат за моделирање и анализу проблема у реалном свету. Она је један од основних појмова у математици који описује како једна величина зависи од друге, односно повезује елементе из једног скупа са елементима из другог скупа према одређеном правилу. Део тога како се приказује ова веза научићеш у овој лекцији. Вежбајући оно што научиш, моћи ћеш да разумеш и примениш функције у реалним животним ситуацијама, као и у даљем учењу математике.



Пример 1

Ја почињем са 2, а затим сваки следећи број добијам додавањем 5. Који су првих пет броја у овој низи и како записујемо правило за проналажење општег члана?

Решење:



Првих пет бројева у низу су: 2, 7, 12, 17, 22.

Пример 2

Марко има 5 јабука. Сваког следећег дана добија још 3 јабуке. Колико ће јабука имати након неколико дана добијања нових јабука?

Решење:

Марко почиње са 5 јабука. Сваког дана добија још по три јабуке. Значи, ако ситуацију представимо речима: „Од почетних 5, број јабука код Марка се повећава за 3 сваки дан.“

Функција је правило по којем се сваком елементу из једног скупа додељује тачно један елемент из другог скупа.

У овом примеру, број јабука зависи од броја дана према датом правилу (функцији) које повезује две величине „број дана“ и „број јабука“. За већу прегледност, то ћемо најпре представити табелом:

Дан	Улаз	Изназ
Први дан	$5 + 3$	8
Други дан	$5 + 3 + 3$	11
Трећи дан	$5 + 3 + 3 + 3$	14
Четврти дан	$5 + 3 + 3 + 3 + 3$	17
Пети дан	$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$	20
Шести дан	$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$	23

Према табели и услови задатка, за седми дан, на пример, број јабука биће $5 + 3 \cdot 7 = 26$ јабука. Ако са x означимо број дана, а са f правило које броју дана придружује број јабука, имамо:

$$1 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 1 \qquad 1 \xrightarrow{f} 8 \qquad f(1) = 5 + 3 \cdot 1 = 8$$

$$2 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 2 \quad \dots \text{односно} \quad 2 \xrightarrow{f} 11 \quad \dots \text{или поинаку запишано} \quad f(2) = 5 + 3 \cdot 2 = 11$$

$$3 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 3 \qquad 3 \xrightarrow{f} 14 \qquad f(3) = 5 + 3 \cdot 3 = 14$$

Сада ако са x означимо број дана, а $f(x)$ буде укупан број јабука, добија се формула: $f(x) = 5 + 3x$. Овакав начин представљања функције зове се аналитичко представљање (или представљање формулом).

Пре него што је Марко почео да добија јабуке, број дана је $x = 0$ и имао је 5 јабука.

Задатак 1

На почетку школске године, Лена одлучује да почне да сакупља поштанске марке. Има 2 марке, а затим сваког дана додаје по 4 марке. Колико ће Лена имати марки после 3 дана? Запиши функцију као једначину.

Пример 3

У једном маркету производи се продају по посебним ценама. За сваког купца продавница нуди попуст у зависности од укупне суме купљених производа:

- За суму до 1000 денара – нема попушта.
- За суму од више од 1000, али највише до 5000 – одобрава се попуст од 5%.
- За суму преко 5000 денара – одобрава се попуст од 10%.

Продавница такође нуди додатни попуст од 2% за купце који плате одмах.

- Запиши функцију која представља цену коју плаћа купац у зависности од тога колико је новца потрошио (без попушта за плаћање одмах):
- Колико ће платити купац који је потрошио 6000 денара?

Решење:

а) Претстављање речима: Прво, треба размотрити како укупна сума коју плаћа купац зависи од износа који је потрошио:

- Ако је потрошио до 1000 динара, нема попуст.
- Ако је потрошио између 1000 и 5000 динара, попуст је 5%.
- Ако је потрошио више од 5000 динара, попуст је 10%.

Потом, ако купац плати одмах, добија додатни попуст од 2%.

Претстављање симболима:

Нека P је укупни износ који је купац потрошио, а од тога зависи сума коју ће платити на каси $f(P)$.

Функција укупне цене изгледа овако:

$f(P) = P$ ако је купац потрошио до 1000 динара.

$f(P) = 0,95 \cdot P$ ако је купио више од 1000 и мање или једнако 5000 динара.

$f(P) = 0,90 \cdot P$ ако је купио више од 5000 динара.

$$\text{или скраћено* } f(P) = \begin{cases} P & \text{ако } P \leq 1000 \\ 0,95 \cdot P, & \text{ако } 1000 < P \leq 5000 \\ 0,90 \cdot P, & \text{ако } P > 5000 \end{cases}$$

Ако купац плати одмах, добија додатни попуст од 2% на износ који плаћа након претходних попушта.

б) Израчунавање вредности функције за конкретан пример: ако је купац потрошио 6000 динара: према а) важи $f(6000) = 0,90 \cdot 6000$ динара.

Потом примењујемо попуст од 2% за одмах плаћање на 5.400 динара: $0,98 \cdot 5400 = 5292$ динара.

Задатак 2

Јована продаје цвеће. Ово је извод из ценовника:

За једно цвеће од сваке врсте. Ако купац купи више од 5 цвећа, добија попуст од 10%. Ако купи више од 10 цвећа, попуст расте на 15%. Јована решава да понуди додатни попуст од 5% свим купцима који плате одмах.

Роза: 300 динара.
Лале: 150 динара.
Орхидеја: 500 динара.

- Запиши функцију која представља цену коју плаћа купац у зависности од броја купљеног цвећа (без попушта за одмах плаћање).
- Израчунај укупну цену за купца који је купио 8 лала, 4 орхидеје и 2 руже, ако је одлучио да плати одмах.

Задатак 3

При роњењу, притисак воде расте са повећањем дубине на којој се ронилац налази. Густина морске воде је 1.020 kg/m^3 , па на сваких 10 метара притисак расте за 1,02 бара (бар је мерна јединица за притисак). Веза за неколико почетних вредности је приказана у следећој табели:

Дубина d (m)	10	20	30	40	50
Притисак P (bar)	1,02	2,04	3,06	4,08	5,1

Да ли је могуће на некој дубини да постоје две различите вредности притиска? Запиши функцију за зависност притиска од дубине роњења, а потом одреди колики је притисак воде на дубини од 34 метра?

Можеш ли навести пример из свакодневног живота који би могао да се представи математичком функцијом? Покушај да саставиш текст о проблему у реалном контексту за чије решавање би се користила функција

а) $f(x) = 320 - 5x$ б) $f(x) = 320 + 5x$

Направи менталну мапу почевши од појма ФУНКЦИЈА. Потом провери све користећи лекцију.

Самосталан рад

- Представи функцију $f(x) = 2x + 5$ речима (објасни шта значи сваки део ове функције).
- Дата је функција $f(x) = 2x - 1$.
Одреди вредност $f(x)$ за следеће вредности x : $x = 3$, $x = -2$, $x = 0$.
- $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ је позната функција у математици. Објасни је речима и запиши формулом.
- Дата је функција $f(x) = 3x - 4$. Запиши пет вредности функције (за $x = 1, 2, 3, 4, 5$).
- Ако температура у граду расте за 3°C сваки сат, почевши од 15°C , како би записали функцију температуре током времена?
- Јанина коса је дуга 25 cm. Сваког месеца расте по 1,5 cm. Запиши функцију K за зависност дужине косе Јане после m месеци. Израчунај дужину косе Јане после 5 месеци.
- а) У Милошевом врту је било 40 садница поврћа. Међутим, због лоших временских услова, суше се по 3 дневно. Запиши формулу која показује зависност броја садница S од броја дана d . Колико дана ће све саднице изумрети?
б) Речима опиши функцију дата са $S = 15 + 4d$ (ако су S и d ознаке за број садница и број дана) у Милошевом врту.

8. У табели су дате вредности за пређени пут у зависности од времена путовања Лејле. Запиши зависност пута од времена.

Време (часови)	0	1	2	3	4
Пут (километри)	0	50	100	150	200

9. Омер изводи хемијски експеримент. Реакција коју посматра састоји се од загревања супстанце, при чему се температура повећава за 2°C сваког минута. Ако је почетна температура супстанце била 18°C , запиши функцију којом ћеш израчунати колика је температура T после времена m ?

Графички приказ линеарне функције и координатни парови

Линеарне функције су један од најчешћих математичких модела које ћеш користити у свакодневном животу. Оне представљају однос између две величине. На пример, укупна маса више истих производа у маркету је линеарна функција масе једног таквог производа; када путујеш константном брзином, растојање које прелазиш у одређеном времену је линеарна функција времена; цена такси превоза је вредност линеарне функције која зависи од пређених километара.

Пример 1

Муса продаје свеске. Почео је са 200 динара, а зарађује по 50 динара од сваке продате свеске. Напиши формулу за функцију која повезује укупну зараду $f(x)$ са бројем продатих свесака x .

Решење:

$f(x) = 50x + 200$, где је: x – број продатих свесака, $f(x)$ – укупна зарада, 50 – зарада по свесци и 200 – почетна сума.



Линеарна функција је зависност између две променљиве која се изражава формулом: $f(x) = ax + b$, где је: x – независна променљива, $f(x)$ – зависна променљива и често се записује као y ($y = ax + b$), а и b су дати бројеви, $a \neq 0$.

Пример 2

Дата је линеарна функција: $y = 2x - 3$

- Наћи колико је y за: $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$.
- Објасни како добијени координатни парови представљају функцију.

Решење:

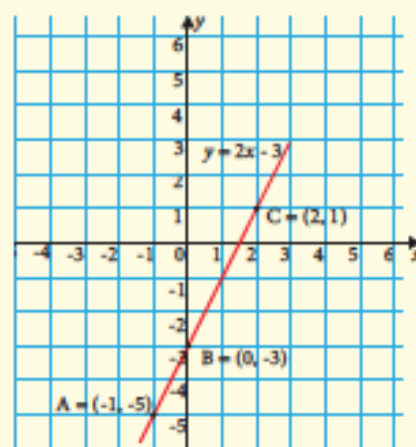
а) Израчунавање сваке вредности y за дате вредности x приказано је у табели:

x	-1	0	2
Израчунавање y	$y = 2 \cdot (-1) - 3 = -2 - 3$	$y = 2 \cdot 0 - 3 = 0 - 3$	$y = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3$
y	-5	-3	1

Од табеле можемо да уочимо следеће координатне парове: $(-1, -5)$, $(0, -3)$, $(2, 1)$.

Координатни пар је уређени пар бројева (x, y) који одређује положај једне тачке у координатном систему.

Први број у сваком координатном пару представља x -координату (апсцису), што значи да представља вредност независне променљиве. Други број у сваком координатном пару представља y -координату (ординату), што значи да представља вредност зависне променљиве y . Ако добијене координатне парове из Примера 2 уцртамо у координатни систем, добијамо тачке које одговарају сваком пару. Повезивањем тачака добија се права која представља графикон линеарне функције.



Пример 3

Да ли координатни пар $(1, 5)$ представља тачку графика линеарне функције из примера 2?
($y = 2x - 3$)

Решење:

Да ли $(1, 5)$ припада графику $y = 2x - 3$ може се проверити на два начина:

I начин: Пошто је нацртан график функције $y = 2x - 3$, можемо пронаћи тачку са координатама $(1, 5)$. Треба да проверимо да ли та тачка лежи на правој која је график функције $y = 2x - 3$.

II начин: Заменом $x = 1$ и $y = 5$ у једначини $y = 2x - 3$ добијамо:

$5 = 2 \cdot 1 - 3 \rightarrow 5 \neq -1$. Пошто добијамо нетачно бројчано једначење, уређени пар није решење једначине линеарне функције, односно тачка са координатама $(1, 5)$ није тачка на правој (графику линеарне функције) $y = 2x - 3$.

Задатак 1

Провери који од координатних парова задовољавају услове линеарне функције
 $y = x - 1$?

- а) $(1, 0)$ б) $(2, 2)$ в) $(-1, 2)$ г) $(-2, -3)$ д) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

Задатак 2

Нацртај графиконе линеарних функција:

- а) $y = 3x$ б) $y = 2x - 4$ в) $y = -x + 2$
г) $y = -4x$ д) $y = -3x - 1$

Задатак 3

Када телефонира, Симеон плаћа основну цену од 50 динара, плус 10 динара за сваку минуто разговора. Направи табелу за укупну цену за 1, 2, 3 и 4 минута разговора.

Пример 4

У једном ресторану цена obroka зависи од броја порција које се наручују. Вредност рачуна може се израчунати функцијом $y = 3x + 5$, где је x број порција, а y укупна цена у еврима.

- а) Наћи координатне парове за $x = 1$, $x = 3$ и $x = 5$.
б) Нацртај график ове функције у координатном систему.
в) Шта представља вредност 5 у овој ситуацији? Шта значи 3?
г) Ако студент наручи 4 порције, колики ће бити његов рачун?

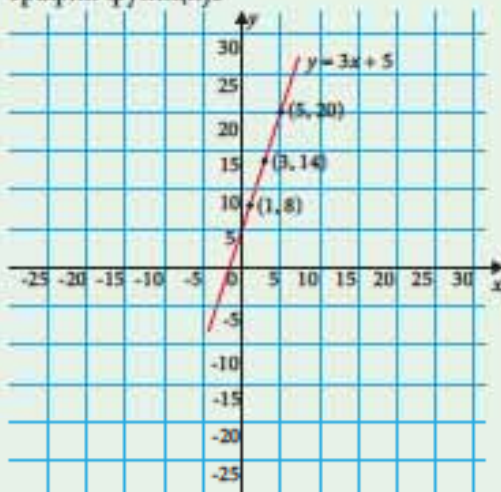
Решење:

- а) Пресметавамо вредност y за сваку вредност x : за $x = 1$, $y = 3 \cdot 1 + 5 = 3 + 5 = 8$, за $x = 3$, $y = 3 \cdot 3 + 5 = 9 + 5 = 14$ и за $x = 5$, $y = 3 \cdot 5 + 5 = 15 + 5 = 20$. Може се попунити табела:

Број порција x	1	3	5
Укупна цена y (евра)	8	14	20

Из табеле можеш записати координатне парове: $(1, 8)$, $(3, 14)$, $(5, 20)$.

- б) График функције



- в) Вредност 5 у једначини представља почетну цену, што значи да без обзира колико се порција наручи, основна цена је 5 евра (на пример, за резервацију стола у ресторану). Број 3 испред променљиве x , односно испред броја порција, представља цену једне порције (тј. 3 евра кошта једна порција).
- г) Ако студент наручи 4 порције, за израчунавање укупне суме заменимо $x = 4$ у функцији: $y = 3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$. Дакле, рачун за 4 порције износи укупно 17 евра.

Задатак 4

Валбона штеди по 200 динара сваке недеље. Почетно је имала 500 динара.

- Напиши функцију која описује уштеду Валбоне.
- Направи табелу за првих пет недеља.
- Нацртај график.

Нацртај графике линеарних функција: $y = x + 3$ и $y = -x - 3$.
Објасни разлику између графика ове две функције.

1. Разумем шта је линеарна функција. Да/Не
(Објасни како разумеш функцију.)
2. Знам како да израчунам y за дату вредност x у функцији. Да/Не
(Напиши пример.)
3. Могу да нацртам график функције наношењем координатних парова и повезивањем тачака. Да/Не
(Опиши како си нацртао график.)

Колико се осећам сигурно у ову лекцију?

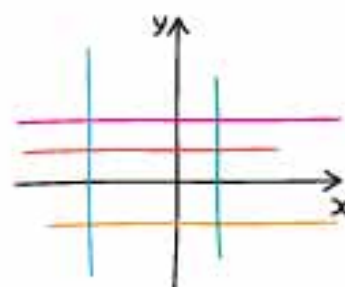
Веома сигуран / Делимично сигуран / Нисам сигуран (Објасни зашто.)

Самосталан рад

1. У продавници електронике, цена телевизора се смањује за 500 динара сваки дан од почетка попушта.
 - а) Ако је почетна цена телевизора била 15.000 динара, запиши формулу за цену телевизора у зависности од дана x .
 - б) Нађи цену за 3, 5 и 7 дана.
 - в) Нацртај график функције.
2. У аутобуској компанији трошак путовања од града А до града Б се израчунава по формули: $y = 30x + 10$, где је x број километара, а y трошак у динарима.
 - а) Нађи трошак путовања за 100 и 250 километара.
 - б) Нацртај график функције.
3. Ристо ради у продавници електронике. Његова основна дневна зарада је 1.000 динара, а добија плус 200 динара за сваки продати производ.
 - а) Запиши формулу за његову зараду y у зависности од броја продатих производа.
 - б) Колико ће зарадити ако прода 3, 4 и 6 производа?
 - в) Нацртај график.
4. У књижари у којој купује Исак, за више од 3 купљене књиге добија попуст од 5 евра на укупну цену. Формула за цену при куповини књига, ако једна књига кошта 4 евра, је: $y = 4x - 5$. Нађи цену за 5 и 7 књига и нацртај график.
5. Изнајмљивање једног бицикла кошта 100 динара дневно. Поред тога, свако ко жели да изнајми бицикл мора да плати и чланарину од 50 динара.
 - а) Напиши формулу за укупну цену коју плаћа особа када изнајмљује бицикл на неколико дана.
 - б) Колико ће платити особа која изнајмљује бицикл на 2 дана? А на 4 дана?

Графици линеарних функција паралелних са x - или y -осом

У овој лекцији упознаћеш функције чији су графици паралелни са x -осом или y -осом. Научићеш како да препознаш те функције и како да нацрташ њихове графике. Функције паралелне са x -осом имају константну вредност за y , док функције паралелне са y -осом имају константну вредност за x . Ова лекција ће ти помоћи да разумеш основне карактеристике ових функција и да се упознаш са њиховим графичким приказом.



Пример 1

Изради мисаону мапу за линеарну функцију. Провери своју мапу користећи претходну лекцију.

Задатак 1

Нацртај график за линеарну функцију $y = 2x - 3$. Колики су коефицијенти a испред независне променљиве x и b ?

Пример 2

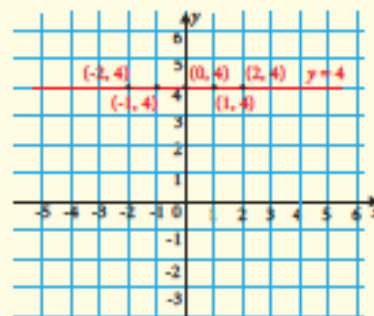
Нацртај график функције $y = 0 \cdot x + 4$.

Решење:

За функцију $y = 0 \cdot x + 4$, коефицијент испред независне променљиве x је 0. Пре него што нацртамо график, направићемо табелу. Пошто је свака вредност x помножена са 0 једнака нули, онда је вредност $y = 4$ за сваку вредност x .

x	-2	-1		1	2
y	4	4	4	4	4

За сваки од добијених координатних парова: $(-2, 4)$, $(-1, 4)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$ обележимо одговарајућу тачку у координатном систему. Повезивањем тих тачака добијамо хоризонталну праву, паралелну са x -осом. Формулу функције можемо записати и као $y = 4$. Ово је константна функција, јер за сваку вредност x , вредност y остаје 4.



Са $y = ax + b$ функција је задата експлицитно. Ако је коефицијент a испред x једнак нули, тј. $a = 0$, онда формула добија облик: $y = 0 \cdot x + b$ или $y = b$, што је константна функција.

Константна (стална) функција је функција чија је излазна вредност у иста за сваку улазну вредност x .

Пример 3

Нацртај график функције $x = -2$.

Решење:

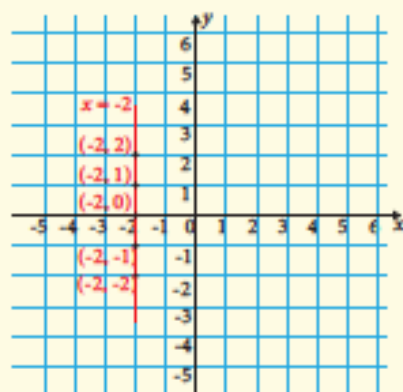
У функцији $x = -2$, x има константну вредност.

То значи да за било коју вредност y , x има вредност -2 .

То се може приказати:

x	-2	-2	-2	-2	-2
y	-2	-1	0	1	2

За сваки координатни пар: $(-2, -2)$, $(-2, -1)$, $(-2, 0)$, $(-2, 1)$, $(-2, 2)$ проналазимо тачку у координатном систему. Повезивањем тачака добијамо вертикалну праву, паралелну са y -осом.



Задатак 2

Нацртај графике функција:

- а) $y = -2$ б) $x = 3$ в) $x = 1\frac{1}{2}$ г) $y = 5$ д) $y = -2\frac{1}{3}$

Пример 4

У лабораторији се испитује уређај који одржава сталну температуру у затвореном простору. Без обзира на протекло време, температура је увек 22°C .

- а) Запиши функцију $T(t)$ која описује температуру у зависности од времена t , где је t број протеклих сати (може бити и негативан — пре почетка мерења).
б) Нацртај график функције и објасни какав је.

Решење:

- а) Функција је: $T(t) = 22$, где је t број протеклих сати (може бити и негативан — пре почетка мерења).

- 6) Ово значи да за сваки сат током мерења и пре мерења температура остаје на 22°C . Да бисмо нацртали графикон, означавамо неколико тачака у координатном систему: $(-2, 22)$, $(-1, 22)$, $(0, 22)$, $(1, 22)$, $(2, 22)$, $(3, 22)$. Повезивањем ових тачака се добија графикон функције $y = 22$.

Графикон ће бити хоризонтална права паралелна са x -осом, што значи да температура остаје константна.



Размисли о две функције: једна се записује у облику $y = m$, а друга у облику $x = n$. Како изгледа графикон сваке од ових функција (на које осе су паралелне и зашто)? Како може ово знање да ти помогне при решавању реалних проблема?

У својој свесци реши задатке:

1. Која је разлика између функција облика $y = b$ и $x = a$?
2. Које од функција: $y = -1$, $x = -3$, $x = 2$, $y = 4,5$ имају графикон, праву паралелну са y -осом?
3. Нацртај графиконе функција $y = -3$ и $x = 2$.
4. Напиши проблем из свакодневног живота који ће се решавати коришћењем једне од функција $y = b$ и $x = a$.

Врати се на лекцију и провери да ли си тачно решавао.

Ако имаш 2 нетачна задатка, треба да се фокусираш на поновно учење и вежбање графикона линеарних функција облика $y = b$ и $x = a$.

Ако си решио 3 или 4 задатка, сматра се да си успешан у овој лекцији.

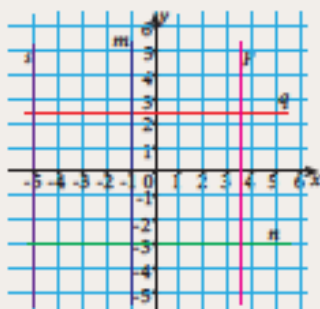
Самосталан рад

1. У једној школској сали клима-уређај је подешен тако да температура у просторији се одржава стално на 22°C , без обзира на доба дана.
 - а) Напиши функцију која описује температуру у просторији.
 - б) Нацртај графикон функције.
2. У локалном ресторану дневни специјалитет се увек продаје по фиксној цени од 150 динара, без обзира на дан.
 - а) Изрази везу између цене и дана као функцију.
 - б) Нацртај графикон функције.

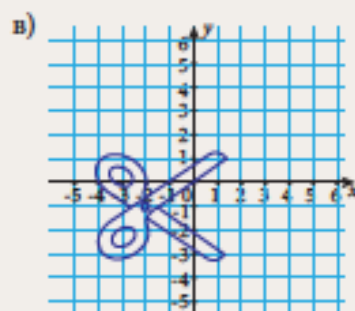
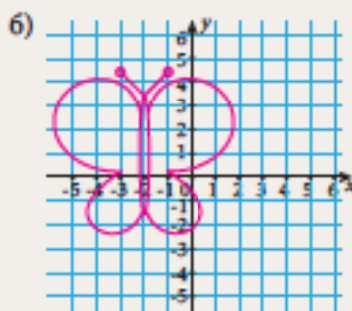
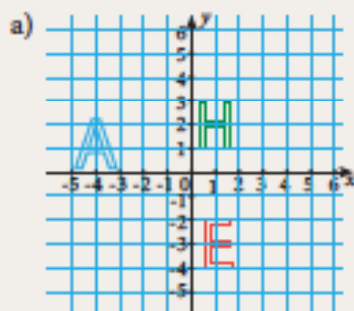
3. У парку, аутомат за топле напитке увек прима тачно 100 динара, без обзира на врсту или број напитка који може да се добију.

- а) Запиши функцију која описује улазни износ у аутомат.
б) Нацртај графикон функције.

4. Напиши једначине датих правих.



5. Запиши једначине оса симетрије следећих облика:



6. а) Означи тачке $(-4, 3)$, $(-4, 5)$, $(-4, 0)$, $(-4, 2)$, $(-4, -3)$ у координатном систему. Запиши једначину праве која пролази кроз ове тачке.
б) Означи тачке $(-4, 5)$, $(-3, 5)$, $(2, 5)$, $(0, 5)$, $(4, 5)$ у координатном систему. Запиши једначину праве која пролази кроз ове тачке.
7. У координатном систему нацртај облик за који су праве $x = 3$ и $y = 4$ осе симетрије.
8. Тачке $M(2, 3)$, $N(-1, 5)$, $P(-4, 3)$ и $Q(-1, -1)$ су темена делтоида.
а) Нацртај делтоид у координатном систему.
б) Запиши функције две дијагонале делтоида.
9. Дате су тачке $A(2, 4)$, $B(2, -3)$, $C(1, 4)$, $D(2, -2)$, $E(2, 6)$. Која од тачака не припада групи? Објасни свој одговор.

Т Е М А
4

МЕРЕЊА



Замисли један дан у којем ништа не може да се измери. Како би знао колико је сати, колико километара смо прешли, колика је тежина неког предмета или колико дуго треба да кувамо чај? Мерење је поступак којим упоређујемо величине предмета са изабраним мерним јединицама и на тај начин одређујемо њихову дужину, масу, запремину, време или неку другу величину.

„Мерење је уметност да будеш тачан – без њега све би било само приближно.“

Резултати учења

Након проучавања ове теме бићеш способан/способна да:

- изабереш одговарајуће мерне јединице за процену, мерење, прорачунавање и решавање проблема у свакодневном контексту;
- црташ и тумачиш графиконе из стварног живота укључујући више од једне фазе, на пример, графикон за време путовања;
- решаваш проблеме из свакодневних ситуација са прорачунавањем обима четвороугла, површине сложених 2Д облика и запремине коцке и квадрата.

Мерни инструменти за дужину и мерне јединице. Микрон

У овој лекцији ћеш се упознати са два типа мерних инструмената који се користе за мерење дужине, а то су аналогни и дигитални инструменти. Ови инструменти су кључни за тачност и прецизност у различитим научним, техничким и индустријским областима.

Аналогни инструменти за мерење, као што су мерне лењире и шублери, су уобичајени и лаки за употребу, али захтевају пажњу и интерпретацију читавања. Дигитални инструменти, пак, користе електронске дисплеје и аутоматски показују тачне вредности, што их чини савременијим и погодним за прецизна мерења.



Посебно ћеш се фокусирати на мерење веома малих дужина и дебљина, што захтева употребу микронских инструмената. Микронски инструмент је идеалан за мерење веома малих димензија, као што је дебљина материјала или прецизност делова у машинству и електроници. Притом ћеш се упознати са мерном јединицом микрометар и њеним претварањем у метре и милиметре.

Пример 1

Милан је решио да направи рам за слику. За то ће му бити потребне различите дужине дрвених летви. Он има мерне инструменте са мерним јединицама за дужину у центиметрима и метрима. Помози му да изврши прорачуне и одговори на питања:

- Ако Милан има дрвену летву која је дугачка 3 метра и дели је на 100 делова, колико центиметара ће имати сваки део?
- Милан треба да искористи две летве: једна је 1,5 метар, а друга је 150 центиметара. Колико су дугачке заједно у центиметрима? (Запиши поступак и резултат.)
- Ако Милан треба да купи 5 летви, свака дугачка 2 метра, колика ће бити укупна дужина летви у центиметрима?
- Запиши укупну дужину летви ако Милан има летву од 2 метра и летву од 850 центиметара. Како ћеш записати ту дужину у метрима и у центиметрима?
- Милан је проценио да је свака дрвена летва дуга око 4 метра. Ако свака летва има тачну дужину од 3,7 метара, израчунај укупну дужину 5 таквих летви. Колика је разлика између процењене и тачне укупне дужине?

Решење:

а) $3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$, $300 \text{ cm} : 100 = 3 \text{ m}$

б) $1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$, укупна дужина $150 \text{ cm} + 150 \text{ cm} = 300 \text{ cm}$

в) $5 \cdot 2 \text{ m} = 10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$

г) $2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$, $200 \text{ cm} + 850 \text{ cm} = 1050 \text{ cm}$, $1050 \text{ cm} = 10 \text{ m } 50 \text{ cm}$

д) Милан процењује да је свака летва 4 метра. Значи процењена укупна дужина је $5 \cdot 4 = 20 \text{ m}$.

Ако је свака летва 3,7 метара, свих 5 летви имају укупну дужину: $5 \cdot 3,7 \text{ m} = 18,5 \text{ m}$.

Разлика између процењене и тачне укупне дужине је $20 - 18,5 = 1,5 \text{ m}$.

Задатак 1

Град планира да изгради мали мост преко потока за бицикличичку стазу. Ти си део тима који треба да измери и одреди тачне димензије за мост. У вези са градњом дати су следећи подаци:

- Ширина потока је 4,25 m.
- Мост има дужину која је са обе стране потока за 0,5 m већа од ширине потока.
- Ширина моста треба да буде 3 пута већа од његове ширине.

- Које мерне инструменте ћеш користити да измериш дужине на терену?
- Колика ће бити укупна дужина моста?
- Колика ће бити ширина моста?
- Уколико користиш метар са милиметарском поделом, како ћеш представити тачно мерење у центиметрима и милиметрима?

Пример 2

Анета је љубитељ биологије и жели да проучи разлике између различитих биљних влакана. Она жели да измери дебљину влакана са листа једне траве. Њен наставник јој каже да се дебљина једног влакна обично мери у микронима (μ – ми).

1 микрон (μ) је једнак милионитом делу метра.

Користећи одговарајуће инструменте за мерење веома малих дужина, Анета је дошла до закључка да је дебљина влакна траве 50 μm .

Дужина једнака милионитом делу метра у SI названа је микрометар, μm . Краћа ознака за микрометар је микрон, односно 1 μm или 1 μ . Означавање ове дужине микроном (μ) повучено је из употребе 1967. године.

- а) Претвори дебљину из микрона у милиметре.
- б) Ако је дебљина људске длаке приближно $70\ \mu\text{m}$, која је длака тања, длака са листа или људска? Колика је разлика у микронома између две длаке?
- в) Да би замислио величину, израчунај колико оваквих длака може да се поређа једна до друге да формирају дужину од 1 милиметар.
- г) Зашто је важно у науци да се користе микрометри за мерење овако малих димензија?

Решење:

- а) Користећи везу између милиметара и микрона, ако је дебљина длаке $50\ \mu\text{m}$, онда: $50\ \mu\text{m} = (50 : 1000\ \text{mm}) = 0,05\ \text{mm}$. Дебљина длаке је $0,05\ \text{mm}$.
- б) Ако је дебљина људске длаке $70\ \mu\text{m}$, а дебљина длаке траве $50\ \mu\text{m}$, онда је разлика између њих: $70\ \mu\text{m} - 50\ \mu\text{m} = 20\ \mu\text{m}$. Длака траве је тања за $20\ \mu\text{m}$.
- в) Да би замислио величину, треба израчунати колико длака од $50\ \mu\text{m}$ може да се поређа да формира дужину од $1\ \text{mm}$. Из тога што је $1\ \text{mm} = 1000\ \mu\text{m}$ добија се $1000\ \mu\text{m} : 50\ \mu\text{m} = 20$.
Значи, када се 20 длака од $50\ \mu\text{m}$ поређа једна до друге, добија се дужина од $1\ \text{mm}$.
- г) Коришћење микрона (μm) у науци је веома важно за прецизно мерење малих димензија, као што су ћелијске структуре, микроскопски предмети или влакна. Микрони омогућавају високу тачност при мерењу ствари које су сувише мале да би се измериле обичним мерним инструментима који мере у сантиметрима или милиметрима. Ово је посебно корисно у биологији, медицини и технологији, где детаљи на микронивоу имају велико значење за разумевање процеса и функција.

Задатак 2

Један научни експеримент захтева прецизно одређивање димензија веома малог предмета у облику квадрата. Мерења су дата у различитим јединицама: дужина предмета је $2500\ \mu\text{m}$, ширина предмета је $0,75\ \text{mm}$, а висина предмета је $0,05\ \text{cm}$.

- а) Претвори све димензије у милиметре.
- б) Претвори све димензије у микроне.
- в) Колико пута је дужина предмета већа од висине?

Пример 3

Електроинжењер израђује штампану плочу за електронски уређај. Димензије плоче су дате у различитим јединицама: дужина плоче је $15\ \text{cm}$, ширина плоче је $85\ \text{mm}$, а дебљина плоче је $1\ 200\ \mu\text{m}$.

- а) Претвори све димензије у милиметре.
- б) Претвори све димензије у микроне.

- в) Ако сваки слој плоче има дебљину од $1200\ \mu\text{m}$, колико највише слојева може да се поређа један на други у кутији висине $2\ \text{cm}$?

Решење:

- а) Претварање у милиметре:

$$1\ \text{cm} = 10\ \text{mm}, 1\ \mu = 0,001\ \text{mm}$$

- Дужина: $15\ \text{cm} = (15 \cdot 10)\ \text{mm} = 150\ \text{mm}$
- Ширина: $85\ \text{mm}$ - веће е во милиметри
- Дебљина: $1200\ \mu = (1200 \cdot 0,001)\ \text{mm} = 1,2\ \text{mm}$

- б) Претварање у микроне:

$$1\ \text{mm} = 1\ 000\ \mu\text{m}, 1\ \text{cm} = 10\ 000\ \mu\text{m}$$

- Дужина: $15\ \text{cm} = (15 \cdot 10\ 000)\ \mu\text{m} = 150\ 000\ \mu\text{m}$
- Ширина: $85\ \text{mm} = (85 \cdot 1\ 000)\ \mu\text{m} = 85\ 000\ \mu\text{m}$
- Дебљина: $1\ 200\ \mu\text{m}$ - већ је у микронима

- в) Израчунавање броја слојева:

- Максимална висина кутије: $2\ \text{cm} = 20\ \text{mm}$
- Дебљина једног слоја: $1,2\ \text{mm}$

$$\text{Број слојева} = 20\ \text{mm} : 1,2\ \text{mm} = 16,(\bar{6})$$

Пошто не може да постоји део слоја, максималан број слојева је 16.

Задатак 3

Петар жели да измери дебљину три различита слоја одеће које користи у зимским условима. За то користи посебне мерне инструменте и добија следећа мерења:

- Дебљина слоја унутрашње флисове јакне: $450\ \mu\text{m}$
- Дебљина слоја средњег зимског џемпера: $800\ \mu\text{m}$
- Дебљина слоја спољне зимске јакне: $1\ 200\ \mu\text{m}$

- а) Претвори дебљине сва три слоја из микрона (μm) у милиметре (mm).
- б) Која од одећа је најдебља? Која је најтања? Колика је разлика у микронима између најтање и најдебље одеће?
- в) Колико од сваког слоја треба да поређамо један до другог да бисмо добили слој од $5\ \text{cm}$?
- г) Објасни зашто је важно користити микрона (μm) при мерењу дебљине различитих материјала, као што је одећа. Како ово може да помогне у дизајнирању зимске одеће?

Задатак 4

Прочитај дужину приказану на различитим мерним инструментима и за сваки инструмент запиши да ли је аналогни или дигитални.



Петар, који живи у хладном региону, треба да изабере коју зимску одећу ће носити како би се заштитио од хладног времена. Он је измерио дебљине три слоја одеће (флис јакна, зимски џемпер и зимска јакна), али жели да зна како дебљина одеће утиче на њену изолацију. Ако одећа која има већу дебљину ефикасније задржава топлоту, како ћеш искористити ову информацију да помогнеш Петру да изабере најбољу зимску одећу за различите температурне услове?

Објасни како знање о микронима и дебљини слојева може помоћи у доношењу одлуке о облачењу у зимским условима. Истражи карактеристике различитих врста одеће у зависности од дебљине.

Одговори на питања у својој свесци, а затим их подели са својим школским друговима.

1. Разумем шта је микрон (μm) и како се користи при мерењу малих димензија.
(Да / Не)
Ако не, који делови објашњења или решавања задатка су ми били нејасни?
2. Да ли сам успео/успела да правилно претворим мерне јединице (микроне у милиметре)?
(Да / Не)
Ако не, како бих побољшао/побољшала процес претварања?
3. Шта сам научио/научила о томе како мерење у микронима помаже у различитим научним и практичним ситуацијама?
Напиши кратак одговор на ово питање како би сумирао/сумирала оно што си научио/научила.

Самосталан рад

1. Претвори:
 - а) 3,5 километара у метре.
 - б) 250 милиметара у центиметре.
2. Растојање од куће до школе је 546 метара. Запиши растојање као вишечлани број.
3. Претвори 3,25 m у
 - а) cm б) dm в) dam
4. Да би проценио, а затим тачно измерио дужину стола у својој учионици, прати ове кораке:
 - 1) Процена дужине:
 - Погледај сто и покушај да га упоредиш са познатим објектом чију дужину знаш, на пример, А4 папир (који је дугачак приближно 30 cm) или дужина твоје руке.
 - На основу тог поређења, направи приближну процену дужине стола.
 - 2) Мерење помоћу мерног инструмента:
 - Користи одговарајући мерни инструмент, као што је метар или лењир, да тачно измериш дужину стола.
 - Постави инструмент дуж једне стране стола и забележи измерену дужину.
 - Ако је инструмент краћи од дужине стола, направи више мерења и сабери их како би добио укупну дужину.
 - 3) Поређење процене и мерења:
 - Упореди своју почетну процену са тачном измереном дужином.
 - Забележи разлику између процене и мерења и размисли о могућим разлозима за ту разлику.

Ова активност ће ти помоћи да побољшаш своје вештине процене и мерења, као и да разумеш колико је прецизност важна при мерењу дужина.
5. Који вишечлани број је већи: 5 метара или 520 центиметара? За колико?
6. Израчунај периметар следећих многоуглова ако су дате дужине њихових страна:
 - а) Правоугаоник са странама 4 m и 6 m.
 - б) Троугао са странама 5 cm, 8 cm и 5 cm.
 - в) Правилан петоугао са страном од 3 m.
7. Марко има украсну траку дужине 1500 mm. Претвори ову дужину у вишечлани број.

8. Измери дужину помоћу лењира и запиши је у центиметрима и милиметрима. Каква је тачност мерења које си добио? Које су границе мерења овим инструментом?

*9. Користећи микрометар, измери дебљину неког малог металног влакна или жице. Запиши мерење у микронима (μm) и претвори га у милиметре. Како микрометар омогућава прецизно мерење малих димензија? Да ли микрометар може да се користи за мерење већих предмета? Зашто да или зашто не?



Мерни инструменти за масу и претварање мерних јединица за масу

У овој лекцији ћеш се фокусирати на важност прецизности приликом мерења масе. Подсетићеш се како се читају скале аналогних и дигиталних мерних инструмената за масу, како се користе одговарајуће мерне јединице и ознаке приликом мерења.

Посебно ћеш обратити пажњу на претварање мерних јединица за масу користећи односе између различитих јединица. Ове вештине су неопходне за прецизна прорачунавања и процене, које могу бити корисне у различитим областима као што су наука, индустрија, здравство и свакодневни живот.

Пример 1

Који од мерних инструмената за масу су аналогни, а који дигитални?

1)



2)



3)



4)



Пример 2

Марко и Јана су ангажовани у пројекту за израду етикета са прецизним мерама масе различитих материјала који се користе у фабрици за паковање.

Они треба да мере масу различитих предмета користећи различите мерне инструменте и јединице. У процесу ће се користити и аналогне и дигиталне ваге за мерење, а такође ће морати да претварају јединице из једне у другу да би добили тачне резултате и забележили податке.

- Марко користи аналогну вагу која има скалу са подецима на сваких 100 грама. Он мери масу комада алуминијума и чита вредност на скали. Ако казаљка показује седму подеоку по 100 грама и трећу подеоку по 10 грама, колика је укупна маса комада алуминијума?
- Јана користи дигиталну вагу која директно приказује масу у килограмима. Вага показује 2,850 kg за велику пакету. Колико је то у грамима? (Запиши поступак претварања јединица.)
- Марко треба да забележи масу паковања за 5 пакета од којих сваки има масу од 3,2 kg. Колика је укупна маса свих пакета ако је забележимо у грамима? Колика је укупна маса ако је забележимо у тонама?
- Јана процењује да маса једног пакета износи 3 килограма. Мерење дигиталном вагом показује 3,4 kg. Колика је разлика између процене и мерења? Колики проценат од тачне масе (3,4 kg) чини процењена маса (3 kg)?
- У фабрици за паковање потребно је 5,5 тоне хране која треба да се спакује у пакете масе по 2 kg. Колико пакета ће бити? Колика је маса целе хране у грамима?

Решење:

а) Маса комада алуминијума: $7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 = 700 + 30 = 730 \text{ g}$.

б) Маса у грамима: $2,850 \text{ kg} = (2,850 \cdot 1\,000) \text{ g} = 2\,850 \text{ g}$.

в) Укупна маса у грамима: $5 \cdot 3,2 \text{ kg} = 16 \text{ kg} = 16\,000 \text{ g}$.

Укупна маса у тонама: $16 \text{ kg} = 0,016 \text{ t}$.

г) Разлика између процене и тачних мерења је: $3,4 \text{ kg} - 3 \text{ kg} = 0,4 \text{ kg}$.

Да бисмо одредили колико је у процентима процењена маса у односу на тачну масу,

треба да одредимо количник $3 : 3,4$. У овом случају добија се бесконачан децимални

број, па да бисмо избегли губитак тачности због заокруживања резултата, поделићемо

бројеве у облику разломака, односно $\frac{3}{1} : \frac{34}{10} = \frac{3}{1} \cdot \frac{10}{34} = \frac{10}{34} = \frac{5}{17}$. У процентима имамо:

$\frac{5}{17} \cdot 100 = \frac{500}{17} = 88\frac{4}{17}\%$. Запиши проценат као децимални број са две децимале.

Ово значи да је Јанина процена $88\frac{4}{17}\%$ од тачно измерене масе.

д) Број пакета: $5,5 \text{ t} = 5\,500 \text{ kg}$; $5\,500 \text{ kg} : 2 \text{ kg} = 2\,750$ пакета.

Маса целе хране у грамима: $5,5 \text{ t} = 5\,500 \text{ kg} = (5\,500 \cdot 1\,000) \text{ g} = 5\,500\,000 \text{ g}$.

Задатак 1

Ана треба да измери масу пакета пшенице користећи аналогну вагу. На скали ваге казаљка показује 4 поделе по 1 килограм и још 5 мањих подела, при чему свака мања подела износи 100 грама. Колика је укупна маса паковања у килограмима и у грамима?

Задатак 2

Зоки је измерио масу 3 пакета чоколаде. Први пакет има масу 250 g, други 0,5 kg, а трећи 300 g. Колика је укупна маса сва три пакета у килограмима?

Задатак 3

На полици у апотеци стоје кутије са различитим паковањима лекова. Једна кутија садржи 14 таблета од по 400 mg, друга кутија 10 таблета по 325 mg, а у трећој кутији има 20 кеса од по 15 g. Израчунај укупну масу лекова ако на полици има по 10 кутија сваког вида лека. Изрази укупну масу у грамима, децаграмима и хектограмима.

Пример 3

Једна кутија чоколада има масу од 2,5 kg. У магацину има 48 таквих кутија.

- Колика је маса свих кутија заједно у килограмима?
- Претвори укупну масу кутија у граме.
- Један камион може да превезе максимум 1,2 тоне терета. Да ли се овај терет може превезти једним камионом? Ако не, колико тона треба превезти другим камионом?

Решење:

- Маса свих кутија = број кутија · маса једне кутије = $48 \cdot 2,5 = 120 \text{ kg}$.
- Маса у грамима: $120 \cdot 1\,000 = 120\,000 \text{ g}$.
- Да би се одговорило на ово питање, најпре треба претворити масу коју камион може да носи из тона у килограме: $1,2 \text{ t} = (1,2 \cdot 1000) \text{ kg} = 1200 \text{ kg}$. Поређење: $120 \text{ kg} < 1200 \text{ kg}$. Да, цео терет може да се превезе једним камионом јер је маса кутија мања од капацитета камиона.

Задатак 4

У фабрици брашна пакују се кесе брашна од по 4,75 килограма.

- Фабрика производи 650 кеси дневно. Колика је укупна маса брашна у килограмима?
- У једном магацину може да се складишти максимум 3,5 тоне брашна. Да ли све кесе произведене за један дан могу стати у један магацин?
- Претвори укупну масу брашна у вишеимен број: 1250 g; 7,4 kg; 5081 kg; 2,34 t.

Када би радио у продавници или магацину, како би одлучио коју мерну јединицу (граме, килограме или тоне) да користиш за различите производе? Објасни зашто је важно правилно изабрати јединице за масу у свакодневном животу.

Одговори на питања у свесци.

1. Да ли могу да израчунавам укупну масу са различитим мерним јединицама (грами, килограми, тоне)? Да / Делимично / Не
2. Да ли разумем значење сваке мерне јединице и када се користи? Да / Делимично / Не
3. Да ли сам успео да повежем знање о мерним јединицама за масу са примерима из стварног живота? Да / Делимично / Не
4. Шта бих могао да урадим боље следећи пут да бих лакше решавао овакве задатке?

Самосталан рад

1. Једно паковање брашна има масу од 3,25 kg. Колика је маса у хектограмима (hg), декаграмима (dag) и милиграмима (mg)?
2. Ако једна кутија чоколада има масу 1,2 hg, колико таквих кутија је потребно за распоређивање чоколада из кутије од 6 kg?
3. Једна пластична кутија са медом има масу од 5,6 kg, а друга 4,75 kg. Колика је укупна маса у hg? Колика је разлика у маси између две кутије у dag?
4. Која је маса већа: 3,5 hg или 3 500 mg? Колико пута је једна маса већа од друге?
5. Један транспортни пакет садржи 50 паковања путера, свако са масом од 250 g. Колика је укупна маса пакета у килограмима и хектограмима?
6. Једна велика тегла џема има масу од 4,125 kg. Претвори масу у dag, у g и у hg.
7. Процени колику масу има једна празна торба и запиши одговор у hg. Провери тачност мерењем и изрази масу у dag.
8. Парче дрвета које се користи за израду намештаја има масу 15 hg. Приликом обраде треба да се подели на 3 једнака дела. Колика ће бити маса сваког дела у kg?
9. На ваги је приказана маса од 0,875 kg. Запиши је као вишеимен број.
10. Једно транспортно возило може да пренесе до 2 тоне. Колико паковања са масом од 125 килограма може да носи у једном транспорту?

Мерење и мерне јединице за запремину

Мерење запремине је кључна вештина у свакодневном животу и у различитим професионалним областима. Почевши од мерења течности у домаћинству, па све до сложених инжењерских и научних процеса, тачност и разумевање мерних јединица за запремину играју значајну улогу.

Овом лекцијом подсетићеш се како да читаш скале на аналогним и дигиталним мерним инструментима за запремину, као што су мензуре, дигитални мерачи и други инструменти и фокусираћеш се на претварање јединица за запремину, користећи везе између њих. Ове вештине не само што ће ти помоћи у процени и мерењу, већ ће те и припремити за реалне ситуације где су потребни тачност и ефикасност.

Пример 1

Који од мерних инструмената за запремину су аналогни, а који дигитални?



Пример 2

Једна цистерна може да прими тачно 8 хектолитара (hl) течности. За транспорт, течност се претаче у мање посуде са капацитетом од 25 литара (l) свака. Колико посуда капацитета 25 l је потребно да се испразни цела цистерна?

Решење:

Претварање хектолитара у литре: $1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$, $8 \text{ hl} = (8 \cdot 100) \text{ l} = 800 \text{ l}$

Израчунавање броја посуда: $800 : 25 = 32$ посуде.

Значи, потребне су 32 посуде да се испразни цистерна.

Задатак 1

Једна фабрика производи и пакује различите производе, а ваш тим је задужен за мерење и израчунавање дужине, масе и запремине како би се обезбедила тачност у производњи и дистрибуцији.

1. Један пакет производа складишти се у пластичној кутији са следећим димензијама: дужина 0,25 dm, ширина 3,2 m и висина 0,1 hm.

- а) Претвори све димензије у m и cm.
 - б) Израчунај обим основе кутије.
 - в) Прогности да ли кутија може да стане у складиште висине 1,5 dm.
2. Један производ има масу од 450 g.
 - а) Претвори масу производа у dag, hg и kg.
 - б) Ако у пластичну кутију стаје 250 производа, израчунај укупну масу свих производа и упореди је са дозвољеним оптерећењем кутије од 120 kg.
 3. У пластичну кутију може да се сипа течност запремине 3,24 hl. Колико флаша од по 800 ml би било потребно да се напуни пластична кутија?
 4. Напиши сва мерења као једноимене и вишеимене бројеве. Провери да ли су твоје процене тачне кроз мерења и претварања. Користи децималне бројеве са три децимале приликом претварања.

Пример 3

Јелена жели да направи домаћи сок и да га складишти у флашама и кантама. Она је припремила 15 l сока. Код куће има 5 флаша запремине по 750 ml, као и 2 канте запремине по 5 l.

- а) Да ли ће моћи да складишти сав сок у флашама и кантама? Ако не, колико сока ће остати?
- б) Једна флаша има масу од 250 g када је празна. Сок запремине 1 l има масу од 1 kg. Ако се флаша напуни соком, која је укупна маса флаше када је пуна?
- в) Колика ће бити укупна маса сока и празних канти ако свака канта има масу од 1,5 kg?

Истражи однос масе и запремине, односно колика је маса течности која има 1 литар запремине. Тај однос може да се изрази као $\frac{\text{маса kg}}{\text{зафатнина l}}$. Можеш питати и свог наставника физике шта значи појам густина и у којим мерним јединицама се изражава.

Решење:

- а) Запремина 5 флаша: $5 \cdot 750 \text{ ml} = 3\,750 \text{ ml}$ или 3,75 l
 Запремина 2 канте: $2 \cdot 5 \text{ l} = 10 \text{ l}$
 Укупна запремина: $3,75 \text{ l} + 10 \text{ l} = 13,75 \text{ l}$
 Преостало сока: $15 \text{ l} - 13,75 \text{ l} = 1,25 \text{ l}$
 Значи, не може се складиштити сав сок, остаје 1,25 литара.
- б) Маса једне пуне флаше:
 Маса празне флаше = 250 g
 Маса сока у једној пуној флаши запремине 750 ml (1 литар сока има масу 1 kg) = 750 g
 Укупна маса = $250 \text{ g} + 750 \text{ g} = 1\,000 \text{ g} = 1 \text{ kg}$
- в) Укупна маса сока и посуда:
 Маса сока = запремина (литри) · маса по литру = $15 \cdot 1 = 15 \text{ kg}$
 Маса 5 флаша: $5 \cdot 0,25 \text{ kg} = 1,25 \text{ kg}$
 Маса 2 канте: $2 \cdot 1,5 \text{ kg} = 3 \text{ kg}$
 Укупна маса: $15 \text{ kg} + 1,25 \text{ kg} + 3 \text{ kg} = 19,25 \text{ kg}$

Задатак 2

Иван ради на пројекту за одржавање хидропонског система – метода за узгајање биљака без употребе земље. Систем захтева резервоаре за воду и хранљиве растворе са одређеним запреминама. Иван има два резервоара, један са запремином од 18,5 l, а други са запремином од 12,75 l. Он треба да напуни укупно 40 l течности у два резервоара и боце од по 1,25 l.

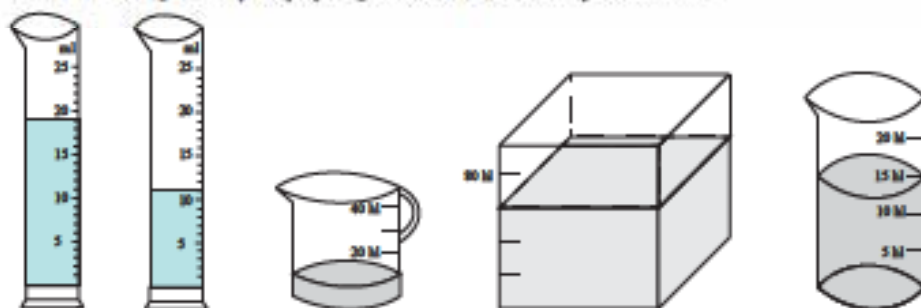
- Колико боца са запремином од 1,25 l ће му бити потребно да складишти вишак течности која неће стати у резервоаре?
- Ако Иван жели да напуни резервоар од 12,75 l до 75 % његове укупне запремине, колико литара ће му бити потребно?
- Ако Иван користи однос 3:2 за воду и хранљив раствор, колико литара од сваке течности ће додати да напуни резервоар од 18,5 l?

Задатак 3

Један литар нафте има масу 0,8 kg. У један резервоар стаје 400 kg нафте. Колика је запремина резервоара?

Задатак 4

Запиши запремину која је приказана на свакој од слика:



Задатак 5

Јована припрема супу за породицу. У рецепту пише да јој је потребно 2,5 l воде за супу. Она има дигитални мерни инструмент са скалом у милилитрима и бокал са максималним капацитетом од 1,2 l.

- Израчунај колико пута ће морати да напуни бокал да добије потребну количину воде.
- Ако Јована напуни бокал до максималног капацитета само два пута, колико воде ће недостајати?
- Користећи дигитални инструмент, Јована примећује да је у посуди у којој припрема супу већ било 750 ml воде. Колико пута ће допунити бокалом да има довољно воде за супу?

Замисли да си дизајнер нових практичних посуда за свакодневну употребу, као што су флаше, бокали или посуде за кување. Како би користио своја знања о мерењу и израчунавању запремине да направиш посуде што прецизније, функционалније и ефикасније за кориснике?

Да ли би изабрао аналогне или дигиталне инструменте за мерење за проверу њиховог капацитета?

Зашто?

Одговори на питања у свесци. Подели их са својим/им другом/цима из одељења.

1. Колико сам сигуран у читање скала на аналогним и дигиталним инструментима за мерење запремине?
 - а) Веома сигуран
 - б) Делимично сигуран
 - в) Треба да вежбам више
2. Да ли могу прецизно да претварам јединице за запремину (нпр. литре у милилитаре, кубне сантиметре у литре)?
 - а) Увек прецизно
 - б) Понекад правим грешке
 - в) Треба да поновим ово
3. Када користим аналогни или дигитални инструмент, да ли могу да проценим да ли је резултат логичан?
 - а) Да, увек сам сигуран
 - б) Понекад сам несигуран
 - в) Не, ово треба да побољшам
4. Шта могу да урадим да побољшам своје вештине за мерење и израчунавање запремине? (Напиши један корак који ћеш предузети)

Самосталан рад

1. Један резервоар садржи 3,25 kl воде. Претвори запремину у hl, dal и l.
2. Резервоар са капацитетом од 1,8 kl је напуњен до 75 % свог капацитета. Колика је тренутна количина воде у dkl и l?
3. Два базена имају запремину од 2,35 kl и 1,75 kl, редом.
 - а) Колика је укупна запремина у hl?
 - б) Колика је разлика у запремини изражена у dal?
4. Која је већа запремина: 4,5 hl или 450 dal? Колико пута је једна запремина већа од друге?
5. Камин превози 12 dal нафте. Колико литара може да се напуни у 24 канистера једнаке величине?
6. Процени колика је запремина једне кофе са водом и запиши одговор у dal. Провери тачност мерењем и изрази запремину у хектолитрима (hl).
7. На дигиталној скали је приказана запремина од 0,435 kl.
 - а) Претвори у hl, dal и l.
 - б) Запиши као вишенаменски број.
8. Један акваријум садржи 2,7 hl воде. Колико l воде садржи акваријум?
9. Један производни процес користи 15 dal течности дневно. Колико hl течности ће бити потрошено за 30 дана?
10. Једно транспортно возило може да носи 6 hl течности по путовању. Колико kl течности може да пренесе за 5 путовања?
11. Једна бурад са капацитетом од 2,5 dal је напуњена до 80 %. Колика је количина течности у буради у l?
12. Резервоар са капацитетом од 1,2 kl се празни у посуде од по 12 l. Колико посуда ће бити потребно да се испразни цео резервоар?
13. Једно складиште има 8 резервоара, сваки са капацитетом од 3,75 hl. Колика је укупна запремина свих резервоара у dal?
14. Колика је разлика у запремини између 5 kl и 450 dal? Изрази разлику у hl.
15. Једна посуда за складиштење има запремину од 0,625 hl.
 - а) Колико dal и l износи та запремина?
 - б) Направи процену да ли је довољна за складиштење 700 l.

Време. 12-часовни и 24-часовни систем

Овом лекцијом подсетићеш се знања која си стекао у претходном разреду о јединицама мере за време, као што су: секунда, минут, сат, дан, недеља, месец, година, деценија и век. При томе ћеш научити да користиш везе између јединица мере за време за претварање једних у друге, као и 12-часовни и 24-часовни систем при решавању задатака из свакодневног живота. Ова два временска система су најчешће коришћени у различитим контекстима: 12-часовни систем се користи за свакодневну употребу, док се 24-часовни систем често користи у званичним документима, транспорту и рачунарским системима.

Пример 1

Породица Јовановић планира једнодневну путовање. Они желе да посете зоолошки врт и музеј, а затим да ручају у ресторану. Погледај табелу са распоредом итрајањем њихових активности:

Активност	Почетно време	Крајње време
Посета зоолошком врту		
Посета музеју		
Ручак у ресторану		

а) Израчунај укупно време које породица Јовановић проводи на следећим активностима:

- Посета зоолошком врту
- Посета музеју
- Ручак у ресторану

Резултате изрази у минутима.

б) Ана, најмлађа чланица породице, је записа времена из табеле на дигиталном сату. Како би та иста времена изгледала на аналогном сату? Укратко опиши разлике између читања дигиталног и аналогног сата.

в) Породица је одлучила да настави са активностима још 2 сата и 45 минута после ручка. Колико је онда сати?

Решење:

- а) За посету зоолошком врту од 10 часова и 30 минута до 12 часова има 1 сат и 30 минута или 90 минута. Зашто?

За посету музеју, породица Јовановић је провела од 12 часова и 30 минута до 14 часова, односно 1 сат и 30 минута или 90 минута.

За ручак у ресторану, одвојили су време од 14 часова и 30 минута до 15 часова и 30 минута, односно 1 сат или 60 минута.

б)

Активност	Почетно време	Крајње време
Посета зоолошком врту		
Посета музеју		
Ручак у ресторану		

- в) Последња активност породице Јовановић је до 15 часова и 30 минута. Породица је наставила још 2 сата и 45 минута. $(15 + 2) \text{ h} + (30 + 45) \text{ min} = 17 \text{ h} + 75 \text{ min} = 18 \text{ h } 15 \text{ min}$. Тада је 18 часова и 15 минута.



Додатни изазов: Колико деценија има у 200 година?

Задатак 1

Ученици једног спортског клуба се припремају за спортско такмичење. Њихов тренер им је припремио распоред за тренинг и активности за један дан. У табели испод је приказан распоред:

Активност	Почетно време	Крајње време
Јутарње загревање	07:45	8:30
Тренинг на терену	9:00	10:15
Одмор	10:15	10:45
Поподневни тренинг	14:00	15:30

- а) Са каквог сата је приказано време у табели?
- б) Израчунај трајање сваке активности изражено у:
 - Минута
 - Сати (у децималном облику, на пример: 1,5 сати)
- в) Колико времена ученици проводе у активном тренингу током дана? Одговори у сатима и минутима.
- г) Пронађи укупно време свих активности (укључујући и одмор) изражено у сатима и минутима.
- д) Ако тренинг на терену траје 20 % дужи од првобитно планираног времена, колико ће бити ново крајње време ове активности?

Додатни изазов:

Колико година има у 2,3 века ?

Задатак 2

Марко је направио план својих обавеза током једне недеље. Он је пажљиво израчунао време које троши на различите активности сваки дан. Ево података о његовим дневним активностима:

Активности	Трајање (у мин.)
Учење	120
Спортски тренинг	90
Играње са другарима	45
Читање књига	30
Гледање телевизије	60

Марко обавља исте активности сваки дан од понедељка до петка, док их за викенд не ради.

- а) Израчунај колико времена Марко троши на учење, спортски тренинг, играње са другарима, читање књига и гледање телевизије за пет радних дана заједно. Изрази време у 1. Минута, 2) Сати
- б) Колико времена (у сатима и минутима) троши Марко на све активности за једну недељу (укључујући и викенд, где не обавља ове активности)?
- в) Израчунај колико времена проводи Марко на учење за: 1. 1 месец (30 дана) 2. 1 годину (365 дана)
- г) Претвори укупно време које Марко троши на спортски тренинг за пет радних дана из минута у сате.

Додатни изазов:

Марко планира да учи 40 % свог времена током викенда како би надокнадио своје обавезе. Ако викенд траје 48 сати, колико времена (у сатима и минутима) ће потрошити на учење?

Задатак 3

- Треба да направиш експеримент који траје 2 сата и 45 минута. Колико секунди траје експеримент?
- Ако путујеш на одмор и тај одмор траје 5 дана и 6 сати, колико ће трајати одмор у сатима?
- Ако си на свом мобилном телефону разговарао укупно 120 минута током недеље, колико сати је то?

Пример 2

Распоред школских активности

Томислав и Ана су ученици у истој школи. Њихов школски распоред је следећи:

- Час математике почиње у 8:30 и траје 45 минута.
 - Потом следи пауза од 15 минута.
 - Следи час физике од 9:30 до 10:15.
 - Ручак почиње у 12:00 и траје 45 минута.
 - Последњи час почиње у 15:00 и траје 1 сат.
- Како ћеш записати време када почиње час математике у 8:30 и када почиње последњи час у 15:00 у 12-часовном систему?
 - Запиши време за све активности у 24-часовном систему (почетак часова математике, пауза, часови физике, ручак, последњи час).
 - Ако Томислав и Ана треба да се врате кући после последњег часа, а аутобус полази у 16:00, у ком систему је јасније приказати време поласка аутобуса и зашто?

Решење:

- Час математике почиње у 8:30. Последњи час почиње у 3 часа поподне.

У 12-часовном систему време је подељено на два периода:

- од поноћи до подне
- од подне (12:00 до поноћи 11:59)

Час уписујемо са тачком између сати и минута и: за период од поноћи до подне, уз час пишемо или изговарамо речи „ујутру“ или „преподне“ за период од подне до поноћи, уз час пишемо или изговарамо речи „поподне“ или „увече“.

У 24-часовном систему, време је у једном периоду, од 00:00 часова до 23:59 часова. Сате пишемо са четири цифре, тако да су сати и минути одвојени са две тачке (:), односно пишемо 00:00, 01:00, 02:00, ... 11:00, 12:00, 13:00, ... 17:00, 18:00, ... 22:00, 23:00



Решење:

- а) У 12-часовном систему време када полази аутобус је 11:30 АМ.
- б) У 24-часовном систему време када аутобус стиже у Охрид је 14:15.
- в) Путовање почиње у 11:30 АМ, значи 30 минута у првој половини дана и завршава се у 2:15 РМ, значи још 2 сата и 15 минута у другој половини дана. Укупно путовање траје: $2\text{ h }15\text{ min} + 30\text{ min} = 2\text{ h }45\text{ min}$. Како ти је лакше да израчунаш, у 12-часовном или у 24-часовном систему?

Задатак 6

Школска екскурзија ће се одржати 12. маја. Погледај распоред за тај дан:

- Аутобус треба да крене из школе у 8:00 АМ.
 - Научна посета ће почети у 9:30 АМ, а завршиће се у 1:45 РМ.
 - Ручак ће почети у 14:00 и трајаће 45 минута.
 - У 3:00 РМ почиње последња активност и трајаће до 17:00.
 - Аутобус полази назад у 6:15 РМ.
- а) Претвори време поласка аутобуса из 12-часовног у 24-часовни систем.
 - б) Колико траје научна посета?
 - в) Израчунај колико слободног времена ћеш имати после ручка до почетка последње активности?

Размисли о ситуацији када радиш у тиму и сви користе различите временске системе. Како ћеш координирати време да не буде забуне? Напиши план како ћеш ускладити временске системе у радном окружењу.

Напиши кратак есеј о томе како различити временски системи могу бити од користи у свакодневном животу.

Самосталан рад

1. Породица Петровски планира једнодневни излет за викенд. Они планирају да посете следеће локације:

Локација	Растојање (у km)	Време путовања до локације (у минутима)	Време задржавања (у минутима)
Етносело	50	60	90
Национални парк	30	40	120
Локални ресторан	20	30	60

Они ће кренути од куће тачно у 9:00 ујутру.

- Израчунај колико времена ће породица провести у путовању до свих локација. Изрази време у сатима и минутима.
- Колико укупно времена ће провести у путовању и боравку на свакој локацији?
- Ако породица одлучи да смањи време боравка у националном парку за 30 минута, колико времена ће им остати за додатне активности?
- Изрази време путовања између свих локација (укључујући и повратак кући) у секундама.
- Колико километара су прешли тог дана?
- Напиши друга питања која можеш да одговориш користећи табелу.

Додатни изазов:

Породица Петровски планира поново да посети етно село након годину дана. Ако је наредна година преступна година, колико дана ће проћи од дана овог путовања до следећег?

2. Ана организује рођенданску забаву и жели да све буде спремно на време. Она је направила распоред припрема и активности током забаве. У табели испод дати су њени планови:

Активност	Почетно време	Трајање
Декорисање простора	14:30	1 сат и 15 минута
Припрема хране	15:45	2 сата и 20 минута
Рођенданска забава	18:15	3 сата
Чишћење након забаве	21:30	1 сат и 45 минута

- 
- а) Израчунај крајње време за сваку активност. Резултате запиши у дигиталном формату (сати: минути).
 - б) Колико времена ће Ана провести у припреми пре почетка забаве? Изрази време у минутима.
 - в) Ако Ана жели да започне са припремама тачно 5 сати пре забаве, колико је сати када треба да почне?
 - г) Запиши времена из табеле на аналогном часовнику. Опиши како изгледају казаљке на почетку и на крају сваке активности.
 - д) Колико укупно времена (у сатима и минутима) је потребно за све активности заједно?
 - ђ) Ана је одлучила да скрати 30 минута од припреме хране. Колико времена ће сада имати за одмор пре него што забава почне?

Додатни изазов:

Ако Ана планира да прослави свој рођендан и следеће године, израчунај колико недеља има до њеног следећег рођендана.

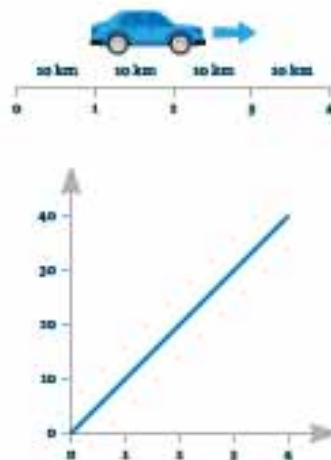
Прочитај пажљиво сваки задатак и реши га. Запиши кораке које ћеш направити да добијеш тачан одговор.

- 3. Претвори 150 минута у сате и минуте.
- 4. Претвори 48 сати у дане.
- 5. Колико недеља има у 15 дана?
- 6. Претвори 6 недеља у месеце (претпостави да месец има 4 недеље).
- 7. Колико година има у 3 деценије?
- 8. Претвори 500 секунди у минуте и секунде.
- 9. Колико недеља има у 10 080 минута?
- 10. Колико секунди има у 3 сата?
- 11. Претвори 730 дана у године.
- 12. Шта је веће: 3 сата и 30 минута или 210 минута? Објасни.

13. Вера планира да ради на пројекту од 11:00 АМ до 5:30 РМ. Претвори време у 24-часовни систем и израчунај колико ће времена провести на пројекту.
14. Васил и његова породица путују из Београда, Србија, у Њујорк, САД. Лет је из Београда у 10:00 АМ по локалном времену. Лет траје 10 сати и стиже у Њујорк у 15:00 по локалном времену.
- Запиши време у 12-часовном систему када ће стићи у Њујорк.
 - Израчунај разлику у временским зонама између Београда и Њујорка.
15. Твој школски аутобус стиже на станицу у 10:00 АМ. Ако се аутобус затим враћа на исту станицу за 3 сата и 20 минута, када ће стићи назад? Запиши време доласка у 12-часовном и у 24-часовном формату.
- 16*. Јана учествује на међународном састанку који ће се одржати између три града: Токио (Јапан), Лондон (Уједињено Краљевство) и Сиднеј (Аустралија). На састанку присуствују учесници из ових трију градова. Састанак ће почети у 09:00 часова у Токију 1. марта.
- Претвори време почетка састанка (9:00 у Токију) у време за Лондон и Сиднеј.
 - Колика је временска разлика између Токија и Сиднеја?

Израчунавање временских интервала и рад са графицима

У овој лекцији подсетићеш се како да израчунаваш временске интервале користећи различите графике и распореде, од свакодневних до сложенијих примера. Временски интервали су од суштинског значаја за организовање времена, посебно када радиш са распоредом догађаја, плановима, транспортом и другим активностима. У овој лекцији научићеш како да користиш временске графике и како да израчунаш временске интервале, што је важан део планирања и организовања свакодневног живота.



Пример 1

Тим ученика планира школску екскурзију која ће трајати 4 дана. Сваког дана је различит распоред активности, као што је дато у табели:

Активности по данима:

Денови	Активности и време за одмор		
	Почетак активности	Одмор	Крај активности
Први	09:00	12:00 - 12:30	16:30
Други	08:30	13:00 - 13:30	17:00
Трећи	09:00	12:00 - 12:30	15:30
Четврти	08:00	11:00 - 11:30	14:00

- Колико укупно трају активности и време за одмор током екскурзије? Израчунај време у часовима и минутима.
- Користи распоред од 24 часа, и израчунај колико сати активности има сваког дана.
- Ако распоред за екскурзију почиње 15. маја, када ће се екскурзија завршити према календару?

Решење:

- Први дан: 7 часова и 30 минута. Други дан: 8 часова и 30 минута. Трећи дан: 6 часова и 30 минута. Четврти дан: 6 часова. Укупно: 27 часова и 90 минута = 28 часова и 30 минута.
- Први дан: 7 часова. Други дан: 8 часова. Трећи дан: 5,5 часова. Четврти дан: 6 часова.
- Почетак 15. маја, крај 18. маја.

Задатак 1

Задужен си да организујеш догађај за викенд. Дневни распоред догађаја изгледа овако:

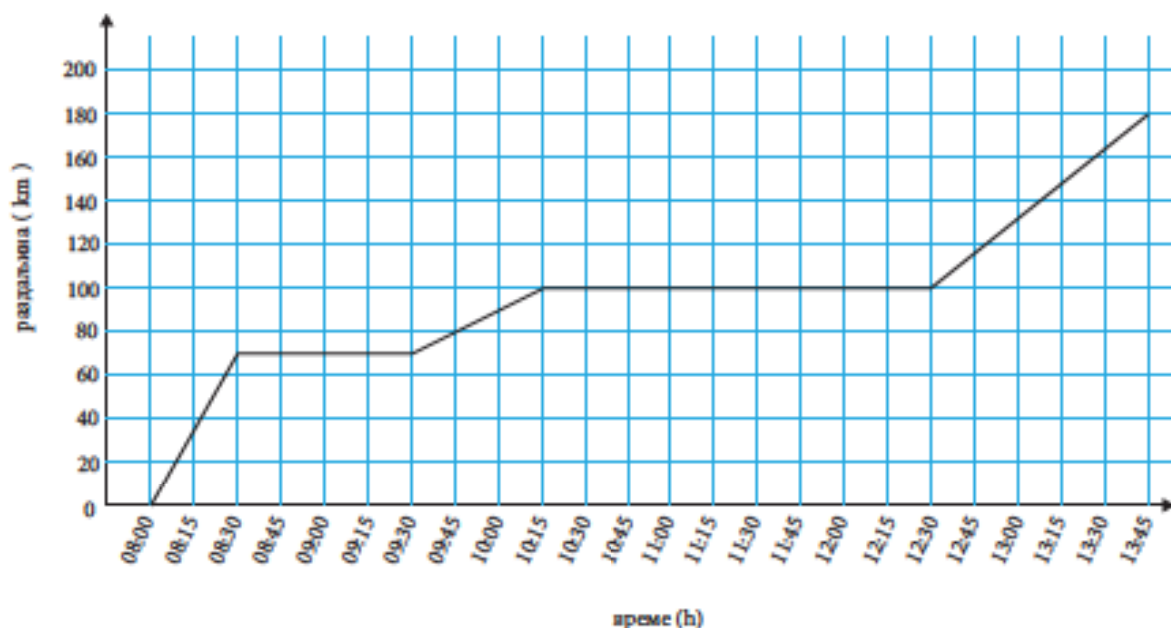
- Почетак догађаја: 9:00
 - Прва пауза: 10:30 – 11:00
 - Друга пауза: 13:00 – 14:15
 - Завршетак догађаја: 16:00
- Колико ће трајати догађај без пауза?
 - Колико времена је планирано за паузе?
 - Израчунај временски интервал између почетка и краја догађаја. Запиши трајање у минутима.

Пример 2

Игор путује из Скопља у Битољ са успутним паузама. Користи графикон како би попунио табелу са распоредом његових активности током путовања, а затим израчунај.

Пређена раздаљина по сатима:

Путовање Игора



а) Прецртај табелу у своју свеску.

Активност	Време у 24-часовном формату
Први део путовања	
Прво стајање за кратак одмор	
Други део путовања	
Друго стајање за ручак	
Трећи део путовања	

- У колико сати је Игор направио прву паузу и колико је трајала?
- Колико дуго је био на ручку?
- Колико укупно времена и километара је Игор путовао од Скопља до Битоља?
- Колико километара је Игор прешао пре него што је стао на ручак?
- Ако Игор уопште није стајао, колико би трајало путовање?

Решење:

- а) Табела - Време активности у 24-часовном запису

Активност	Време у 24-часовном запису
Први део путовања	08:00-08:30
Прво заустављање за краatak одмор	08:30-09:30
Други део путовања	09:30-10:15
Друго заустављање за ручак	10:15-12:30
Трећи део путовања	12:30-13:45

- б) Прву паузу Игор је направио у 8:30 часова и она је трајала до 9:30, односно 1 h ($9\text{ h }30\text{ min} - 8\text{ h }30\text{ min} = 1\text{ h}$).
- в) Ручак је започео у 10:15 часова, а завршио у 12:30 часова. Значи, трајао је $12\text{ h }30\text{ min} - 10\text{ h }15\text{ min} = 2\text{ h }15\text{ min}$.
- г) Да бисмо израчунали укупно време путовања, можемо да прочитамо са графика (или табеле) које је крајње време доласка и време поласка, а затим израчунавамо разлику, односно $13\text{ h }45\text{ min} - 8\text{ h} = 5\text{ h }45\text{ min}$. Са графика читамо која је крајња вредност за километре на крају путовања у 13:45 часова, при чему километре читамо на у-оси. Тако закључујемо да је Игор прешао 180 километара.
- д) Са графика читамо да је у 10:15 часова, пре него што је стао на ручак, Игор прешао 100 километара.
- ђ) Ако Игор уопште није застајао, време путовања може се израчунати на 2 начина, и то: или да саберемо све временске интервале кретања или да од укупног времена путовања одузмемо два временска интервала када је Игор стао на паузу и на ручак. Овде ћемо израчунати на други начин:
 $5\text{ h }45\text{ min} - (1\text{ h} + 2\text{ h }15\text{ min}) = 5\text{ h }45\text{ min} - 3\text{ h }15\text{ min} = 2\text{ h }30\text{ min}$.

Задатак 2

Представи графички промену телесне температуре коју је имао Енес током једног дана док је имао прехладу. Са графика одреди:

- а) Колико дуго је имао температуру изнад $38\text{ }^{\circ}\text{C}$?
- б) У колико сати му се температура смањила на $36\text{ }^{\circ}\text{C}$?
- в) Коју телесну температуру је имао најдуже током дана?
- г) У 14:30 је узео таблету против високе температуре. Колико минута је прошло док температура није пала на $37,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ степени?

Температура по часовима:

Време (h)	Температура ($^{\circ}\text{C}$)
07:00	37
09:30	38
14:15	39
18:00	38
21:00	37,5
21:30	37
22:30	36

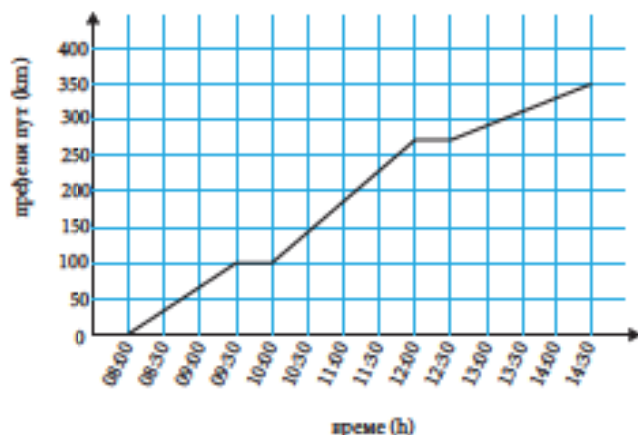
Пример 3

Планирање путовања. Ти и твоја породица планирате да путујете из твојог града до планинског одмаралишта за викенд. План је да се путовање одвија на следећи начин: преподне да буде аутомобилом, а поподне аутобусом. Притом желите да направите једну паузу у делу путовања аутомобилом да не пропустите аутобус. Да бисте направили процену времена путовања, користите распоред активности и графикон:

- Колико ће укупно трајати путовање од твог града до планинског одмаралишта?
- Колико времена пролази између доласка на аутобуску станицу и почетка аутобуског превоза?
- Како бисте путовали ако желите да стигнете у одмаралиште раније? Који део путовања бисте скратили?
- Израчунај колико времена пролази од почетка путовања до доласка у одмаралиште?
- Колико минута касније ће почети путовање ако уместо у 8:00 часова, аутомобил крене у 8:45 часова? Уколико нема успутних пауза, да ли ће стићи на време на аутобуску станицу пре поласка аутобуса?

Потребно време за прелазак пута

Планирање путовања



Решење:

- Укупно време путовања је: $14\text{ h } 30\text{ min} - 8\text{ h} = 6\text{ h } 30\text{ min}$.
- Време између доласка на аутобуску станицу и почетка аутобуског превоза: $12\text{ h } 30\text{ min} - 12\text{ h} = 30\text{ min}$
- Ако желите да стигнете раније, можете скратити време за паузе и заменити други део путовања – уместо аутобусом, да буде аутомобилом. Са графикона је очигледно да је путовање аутомобилом брже – за исте или мање временске интервале аутомобилом се прелази веће удаљености него аутобусом. На пример: аутобусом за 2 h се пређе 80 km, док аутомобилом у првом делу – 105 km за 1 h 30 min, а после паузе – 160 km за 2 h.
- Укупно време вожње је укупно време путовања без пауза и чекања аутобуса, односно: $6\text{ h } 30\text{ min} - (30\text{ min} + 30\text{ min}) = 6\text{ h } 30\text{ min} - 1\text{ h} = 5\text{ h } 30\text{ min}$.
- Путовање ће почети 45 минута касније, односно у 8 h 45 min. Ако приликом путовања аутомобилом нема успутне паузе (застоја), онда ћете моћи да стигнете са својом породицом пре поласка аутобуса.

Задатак 3

Дат је ред вожње за возове од Скопља до Велеса. Представи путовање графиком.

- а) Колико времена путује воз од Лисиче до Велеса?
- б) Колико времена је потребно возу да стигне од Скопља до Велеса?
- в) Између које две станице пут најдуже траје и колико?
- г) Између које две станице се стиже за најкраћи временски интервал?
- д) Да ли има станица између којих путовање траје исто време?
- ђ) Колико километара је растојање од Драчево до Велеса?

Табела – Протекло време и пређено растојање од једног до другог места

Место	Време	Пређено растојање (km)
Скопље	06:20	0
Лисиче	06:31	5
Драчево	06:37	13
Орешани	06:48	25
Велес	07:25	55

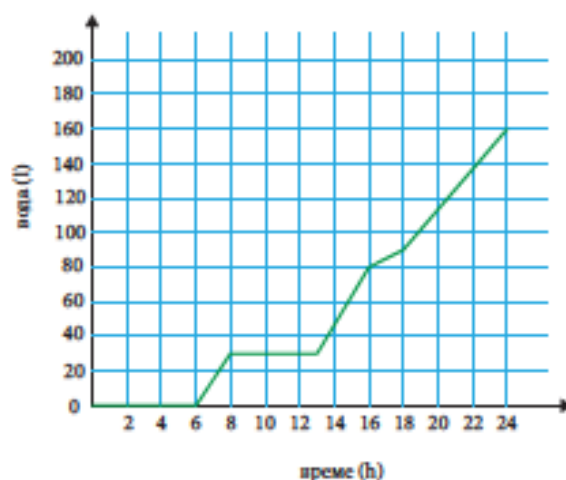
Задатак 4

Графикон приказује потрошњу воде породице Петровски током једног дана.

- а) Колико укупно литара је потрошено током целог дана?
- б) У којим временским интервалима је потрошено више од 30 литара воде? Колико укупно сати је то?
- в) У ком периоду дана се троши највише воде?
- г) Колико сати током дана је потрошња мања од 30 литара?
- д) Израчунај колика би била потрошња воде за један месец уколико дати подаци важе за сваки дан у месецу.
- ђ) Ако 1 000 литара воде кошта 40 денара, колика би била месечна рачуница ове породице?
- е) Које активности би изазвале већу потрошњу воде у различитим деловима дана?
- ж) Погледај рачун за воду своје породице и размисли како можемо да штедим воду, а тиме и новац који плаћамо за воду?

Потрошња воде у временским периодима

Потрошена вода породице Петровски



Размисли о важности тачног израчунавања временских интервала. У којој ситуацији из свог живота сматраш да је тачно израчунавање временских интервала најважније? Напиши конкретан пример из свакодневног живота где ће ти раније научено знање помоћи да организујеш неке активности.

Запиши своју самооцену према следећим питањима. Оцењуј се од 1 до 4, где:

- 1 – Не могу да решим проблем.
 - 2 – Могу да решим неке задатке, али ми је потребна помоћ.
 - 3 – Могу самостално да решим задатке и да објасним основне концепте.
 - 4 – Лако решавам задатке, могу да објасним све кораке и да их применим у свакодневним ситуацијама.
1. Могу да читам и разумем распоред и да га применим за израчунавање временских интервала.
 2. Могу тачно да израчунам временске интервале између различитих активности користећи различите јединице (секунде, минуте, сати, дани, недеље).
 3. Успевам да разумем и користим графиконе за израчунавање временских интервала.
 4. Могу да применим распоред и израчунавање временских интервала у реалним ситуацијама, као што су организовање радног дана или распореда активности

У зависности од своје самооцене, размисли које области можеш да побољшаш. Ако си се оценио за неку тврдњу са 1 или 2, поново погледај задатке који се односе на ту тврдњу и затражи додатну помоћ за боље разумевање.

Самосталан рад

- Најављен је аутобус који треба да крене из твог града у 10:25 и да стигне у суседни град у 14:00. Колико ће трајати путовање? Пресметај временски интервал и запиши га у сатима и минутима.
- Распоред часова у једном твом школском дану изгледа овако:
 - Колико трају само часови не рачунајући паузе?
 - Пресметај временски интервал између почетка првог и краја последњег часа.
- Планирај распоред за 5 различитих активности током дана (на пример: истраживање, писање, пауза, корекција, завршавање).
Пресметај колико укупно времена ће ти требати да завршиш све активности.
- Ана планира путовање:
 - Креће 10. марта и остаје на путовању 12 дана.
 - Потом ће бити код куће 5 дана пре него што поново крене на пут који ће трајати 8 дана.
 - Ког датума ће се Ана вратити са првог путовања?
 - Када ће завршити друго путовање?
- У школи постоји зимски распуст који траје 3 недеље. Почиње 20. децембра. Ученици се враћају у школу првог понедељка после распуста.
 - Ког датума завршава распуст?
 - Који је датум првог школског дана?
- Филмска екипа има распоред активности дат у следећој табели:

Потребно време за снимање сцена	
Снимање сцене 1	08:30–10:15
Одмор	10:15–10:45
Снимање сцене 2	10:45–12:00
Ручек	12:00–13:00
Снимање сцене 3	13:00–15:30

 - Колико укупно трају сва снимања?
 - Колико укупно трају одмор и ручак?

Распоред часова

Час	Почетак и крај часа
1	08:00–08:45
2	09:00–09:45
3	10:00–10:45
4	11:00–11:45
5	12:00–12:45
6	13:00–13:45

7. Ивана ради на пројекту који траје 90 дана и почиње 1. фебруара. Пројекат је подељен на 3 једнаке фазе.
- Колико дана траје свака фаза?
 - На који датум се завршава свака од фаза?
 - Када ће се завршити цео пројекат?
Уради прорачуне за преступну и непреступну годину.
8. Ред вожње за возове:
- Воз 1: Полази из Скопља у 8:20 и стиже у Велес у 9:05.
 - Воз 2: Полази из Велеса у 9:20 и стиже у Ђевђелију у 11:15.
- Колико времена путује воз 1 од Скопља до Велеса?
 - Колико времена путник чека на станици у Велесу да ухвати воз 2?
 - Колико укупно времена је потребно путнику од Скопља до Ђевђелије, укључујући време чекања?

Периметар троугла и четвороугла

У свакодневном животу често се сусрећеш са питањем одређивања периметра облика као што су троуглови, четвороуглови или други многоуглови. Периметар представља укупну дужину свих страна једног облика. У овом часу подсетићеш се на основне појмове и научићеш како да примениш ову концепцију код троуглова и четвороуглова у различитим ситуацијама.



Пример 1

Помажеш у уређењу цветне баште неправилног облика, која има 6 страна. Одлучено је да се постави ниска дрвена ограда око баште како би се заштитило цвеће. Дужине страна баште су: 2 m, 3 m, 4 m, 3 m, 5 m и 4 m.

- а) Ограда се продаје у паковањима од 10 m. Колико паковања оградe ће бити потребно да купиш?
- б) Ако једно паковање кошта 500 динара, колико новца ћеш потрошити?
- в) Ако треба да уредиш башту тако да стране буду једнаке (нпр. Правилан шестоугао), која ће бити дужина сваке стране ако периметар остане исти?

Решење:

- а) Да би одредио укупну дужину оградe коју треба поставити, треба да сабереш дужине свих страна: $2 + 3 + 4 + 3 + 5 + 4 = 21$ m. Ако се ограда продаје у паковању од 10 m, онда треба да се купе $21 \text{ m} : 10 \text{ m} = 2$ паковања и недостаје још 1 m. Значи треба да се купе 3 паковања.
- б) Ако једно паковање кошта 500 динара, онда ће три паковања коштати 1500 динара.
- в) Ако је многоугао правилан шестоугао, онда су његове стране једнаке дужине коју можемо означити са a и периметар се може израчунати $L = 6 \cdot a$. Према услову задатка, периметар правилног многоугла једнак је периметру шестоугла из а), па имамо: $21 \text{ m} = 6 \cdot a$, $a = 21 \text{ m} : 6 = 3,5$ m.

Задатак 1

Замисли да организујеш такмичење на тркачкој стази. Стаза има неправилан облик са 6 страна, а дужине страна су: 10 m, 15 m, 12 m, 20 m, 18 m и 25 m.

- а) Колика је укупна дужина стазе коју ће тркачи морати да истрче?
- б) Ако се такмичење састоји од 5 пута преласка стазе, колика ће бити укупна дужина коју ће сваки од тркача прећи?
- в) Да би обележио стазу траком, купујеш паковања од 50 m траке. Колико паковања траке ће бити потребно за целу стазу?
- г) Ако треба да додаш још једну страну да би направио стазу са 7 страна, колика би била дужина те стране ако желиш да укупан периметар буде тачно 110 m

Пример 2

Ајше организује излет у парку и жели да постави декоративну траку око простора где ће седети са својим другарицама. Простор за излет има правоугаони облик са странама дугим 6 m и 4 m. Поред тога, одлучила је да постави и мањи троугаони простор за играње чије су стране 3 m, 4 m и 5 m. Колико декоративне траке је потребно Ајше?

Решење:

Да би се израчунало колико декоративне траке је потребно Ајше за правоугаони простор за седење, израчунава се периметар правоугаоника:

Периметар правоугаоника = $2 \cdot \text{дужина} + 2 \cdot \text{ширина}$ или периметар правоугаоника = $2 \cdot (\text{дужина} + \text{ширина})$. Зашто?

Периметар се најчешће означава са L . Ако дужину и ширину правоугаоника означиш, на пример, са a и b , онда се периметар правоугаоника може записати формулом:

$$L = 2 \cdot a + 2 \cdot b \text{ или } L = 2 \cdot (a + b).$$

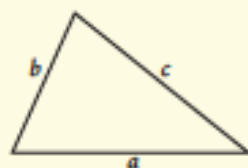
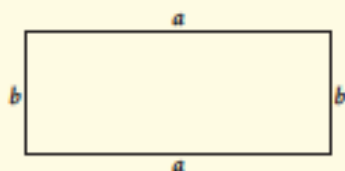
Периметар простора у којем ће седети Ајше са другарицама је: $L = 2 \cdot (6 + 4) = 20 \text{ m}$.

Да би се израчунало колико декоративне траке је потребно за простор у облику разностраног троугла, треба сабрати све три стране, односно $L = a + b + c$.

Троугласти простор има периметар $L = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ m}$.

На крају, да би се израчунало укупно колико декоративне траке је потребно Ајше, треба сабрати два периметра, односно $20 + 12 = 32 \text{ m}$.

Ако Ајше има траку дугу 30 m , да ли ће јој остати од траке или ће јој недостајати?

**Задатак 2**

Израчунај периметар троугла ако његове стране имају дужине 5 cm , 7 cm и 10 cm .

Задатак 3

Израчунај периметар правоугаоника са дужином 8 cm и ширином 5 cm .

Задатак 4

Прецртај табелу у свеску и попуни празна поља!

Троугао	Формула за периметар троугла

Задатак 5

Прецртај табелу у своју свеску и попуни је!

Четвороугао	Формула за периметар четвороугла
	
	
	
	
	
	
	

Задатак 6

Њива има облик једнакокраког трапеца. Две једнаке стране трапеца су дугачке 7 m, а основе имају дужину 8 m и 12 m.

- Колики је периметар њиве?
- Ако одлучиш да смањиш дужину веће основе за 2 m, колики ће бити нови периметар њиве?
- Ако одлучиш да смањиш дужину сваке краке стране за 1 m, колики ће бити нови периметар њиве?

Пример 3

Ти си дизајнер који треба да израдиш рамове за слике у правоугаоном облику са ширином u и дужином $2u$. Неки од рамова садрже украсне делове постављене у правоугаони рам. Украсни делови имају облик једнакокраког троугла са основом 8 cm и краком $x\text{ cm}$.

- Изрази крак x троугла преко периметра и основе.
- Ако знаш да је периметар троугла 28 cm , колика је дужина крака x ?
- Периметар правоугаоника изрази као функцију од u .
- Ако је периметар правоугаоника 60 cm , нађи дужине страна u и $2u$.

Решење:

- Периметар троугла је $L = 8 + 2x$. Треба крак x да се изрази преко основе и периметра. Имамо: $2x = L - 8$, $x = \frac{L-8}{2}$.
- Под а) је изражен крак x преко периметра L и основе. Основа је позната, 8 cm . Ако је и периметар познат, 28 cm , са заменом у формули добијамо: $x = \frac{28-8}{2}$, $x = \frac{20}{2}$, $x = 10$. Крак троугла је 10 cm .
- Ако је дужина правоугаоника $2u$, а ширина u , тада је периметар:
 $L = 2 \cdot (2u + u) = 2 \cdot 3u = 6u$
- Ако је периметар правоугаоника 60 cm , онда: $6u = 60$ $u = 10$.
Стране правоугаоника су: $u = 10\text{ cm}$, $2u = 20\text{ cm}$.

Задатак 7

Замисли да уређујеш башту и око ње постављаш стазу. Башта је у облику неправилног четвороугла, где је једна од страна дуга a метара, друга страна је дуга $2a$ метара, трећа страна је дуга b метара, а четврта страна је дуга $b + 3$ метра. Башта са једне стране додирује мали цветњак у облику равностраног троугла, где је свака страна дуга c метара.

- Изрази периметар баште преко a и b .
- Изрази периметар цветњака преко c .
- Ако је укупни периметар баште 50 метара и страна a је за 4 метра краћа од b , нађи вредности a и b .
- Ако је периметар цветњака 18 метара, колика је дужина стране c ?
- Колика је укупна дужина стазе коју треба да поставиш ако стаза окружује и башту и цветњак?

Ако имаш два троугла са истим периметром, да ли ће увек имати једнаке дужине страна? Објасни зашто и наведи пример.

Одговори на питања у свесци. Затим подели одговоре са својим/им другарем/има из одељења.

Разгледај све решене задатке из ове лекције.

1. Који задатак ти је био најлакши?
2. Који најтежи?
3. Да ли си се осећао/осећала сигурно у рачунању периметра троугла и четвороугла?
4. Шта си научио/научила и како можеш та знања да примениш у стварном животу?
5. Која знања желиш да побољшаш?

Самосталан рад

1. Паркинг-место је у облику правоугаоника. Дужина једне стране је x метара, а ширина је $2x$ метра. Колика ће бити укупна дужина ограда око паркинг-места? (Изрази периметар као функцију од x .)
2. У дворишту вртића налази се жардињера у облику једнакокраког троугла. Две једнаке стране су u метара, а основа је $3u$ метара. Изрази периметар жардињере као функцију од u .
3. Двориште има облик четвороугла. Једна страна је дуга a метара, супротна страна је дуга $2a$ метра. Остале две стране су b и $b + 4$ метра. Изрази периметар дворишта као функцију од a и b .
4. Тркачка стаза има облик разностраног троугла са странама x , $x + 4$ метра и $2x$ метра. Изрази периметар као функцију од x .
5. Игралиште је у облику правоугаоника. Дужина је u метара, а ширина $u - 5$ метара. Изрази периметар као функцију од u .
6. Градина има облик једнакокраког троугла. Две једнаке стране су z метара, а основа је $2z$ метра.
 - а) Изрази периметар градине као функцију од z .
 - б) Колики је периметар градине ако је $z = 7\frac{1}{4}$ m
7. Кућа је окружена оградом у облику четвороугла. Дужина једне стране је x метара, друге стране $x + 3$ метра, а остале две стране су y и $y + 2$ метра.
 - а) Изрази периметар ограда као функцију од x и y .
 - б) Колика је дужина ограда ако је $x = 6$ m и $y = 9$ m?

8. Игралиште има облик петоугла. Дужине страна су $2a$ метра, $3a$ метра, a метар, $a + 2$ метра и $4a$ метра.
- а) Изрази обим игралишта као функцију од a .
- б) Израчунај обим игралишта ако је $a = 22,5$ m.
9. Паралелограм има дужину 10 m, а обим паралелограма је 36 метара. Израчунај другу страну паралелограма.
10. Паркинг-место има облик једнакокраког трапеза са основама 15 m и 9 m, а обим је 42 метра. Израчунај дужину крака паркинга.
11. На улазу у парк налази се декорација у облику ромба. Израчунај дужину стране ромба са обимом 32 m.
12. Летелица у облику трапезоида има стране: 18 dm, 12 dm и 11 dm, а обим 58 m. Израчунај четврту страну летелице.
13. Привезак има облик делтоида са једном страном 11 mm и обимом 3,2 cm. Израчунај другу страну привеска.
- *14. Један од углова ромба је 120° , а мања дијагонала је 8,5 cm. Израчунај обим ромба.
- *15. Мања страна једног правоугаоника је 5 cm, а симетрала једног његовог угла дели већу страну на два дела, од којих је један дужине 4 cm. Израчунај обим правоугаоника.
- *16. Дијагонала квадрата је 12 cm. Кроз темена квадрата повучене су праве паралелне са дијагоналама. Одреди врсту и обим добијеног четвороугла.
17. Краци и мања основа једног трапеза су по 8 cm. Већа основа је $\frac{3}{8}$ пута већа од збира остале три стране. Одреди обим трапеза.
18. Угао између две једнаке стране делтоида је 60° , а дијагонала чији су крајеви темена једнаких углова је 5 cm. Израчунај обим делтоида ако је једна његова страна 7,5 cm.

Површина сложених 2Д-облика

У овој лекцији ћеш се упознати са методама за израчунавање површине сложених 2Д-облика састављених од квадрата, правоугаоника и правоуглих троуглова. Разгледаћеш делове ових облика, користићеш формуле и научићеш како да поједноставиш процес израчунавања. Кроз ову лекцију ћеш схватити колико је важно познавање јединица за мерење и њихова примена у свакодневном животу, на пример, при израчунавању површине собе, дворишта или друге површине.



Пример 1

Давид жели да постави плочице на под своје собе. Соба је правоугаоног облика са дужином од 4 m и ширином од 3 m. Плочице које ће користити су у облику квадрата са страницом од 30 cm.

- а) Колика је површина собе у квадратним метрима (m^2)?
- б) Колика је површина собе у квадратним центиметрима (cm^2)?
- в) Колико плочица му је потребно да прекрије цео под, без узимања у обзир отпада од сечења?

Решење:

Упутство за в) Број потребних плочица = Површина собе у cm^2 : Површина једне плочице у cm^2 , односно $120\,000\,cm^2 : 900\,cm^2 = 133,3$ плочице.

Потребно је 133 или 134 плочице? На који цео број треба заокружити?

Пример 2

Марија жели да постави дрвени оквир око цветне баште у облику правоуглог троугла. Једна катета баште је дуга 4 m, а друга катета је дуга 3 m. Колика је површина баште у квадратним метрима (m^2)?

Решење:

Формулата за плоштина на правоаголен триаголник е:

$$\text{Површина} = \frac{\text{катета}_1 \cdot \text{катета}_2}{2}, \text{ односно } P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Са заменом вредности катета у формулу имамо: $P = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\,m^2$.

Значи, површина баште је $6\,m^2$.

Задатак 1

Радни сто у облику правоугаоника има дужину од 120 cm и ширину од 60 cm.
Израчунај површину радног стола.

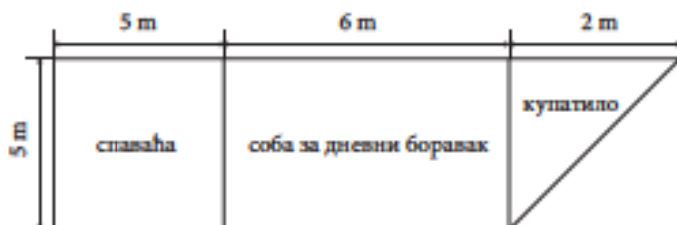
Задатак 2

Квадрат има страну 15 cm.

- Колика је површина квадрата у квадратним дециметрима (dm^2)?
- Колика је дужина правоугаоника који има површину једнаку површини квадрата и ширину од 9 cm?

Пример 2

Милица је купила нов стан са распоредом као на слици. Притом, под у спаваћој соби има облик квадрата, дневна соба је у облику правоугаоника, а купатило — правоугли троугао. Милица жели да постави плочице у свим просторијама стана. Помози јој да направи прорачуне.



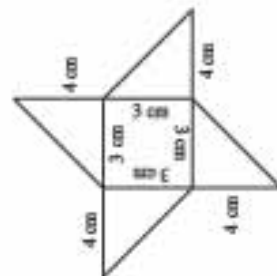
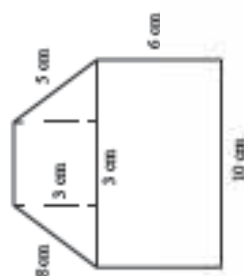
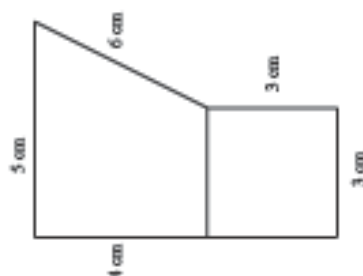
- Колика је укупна површина стана?
- Ако Милица жели да покрије половину стана паркетом, колика је површина коју треба да покрије паркетом?

Решење:

- Површина целог стана је збир површина свих просторија, односно квадрата, правоугаоника и правоуглог троугла.
Површина спаваће, која има облик квадрата, рачуна се формулом $Pp = a^2$, одакле се добија $Pp = 5^2 = 25 \text{ m}^2$.
Површина дневне собе рачуна се по формули за површину правоугаоника:
 $P = a \cdot b = 5 \cdot 6 = 30 \text{ m}^2$.
За површину купатила, из услова задатка, једна катета је 2 m, а друга катета једнака је дужини правоугаоника, односно 6 m.
Површина правоуглог троугла: $P = (a \cdot b) : 2 = (2 \cdot 5) : 2 = 10 : 2 = 5 \text{ m}^2$.
Укупна површина стана је збир површина квадрата, правоугаоника и троугла:
Укупна површина = Површина спаваће + Површина дневне + Површина купатила
односно: $P = 25 \text{ m}^2 + 30 \text{ m}^2 + 5 \text{ m}^2 = 60 \text{ m}^2$.
- Половина укупне површине је $\frac{1}{2}$ од 60 m^2 , односно 30 m^2 .

Задатак 3

Израчунај површину сваког сложеног 2Д облика.



Пример 3

Сара жели да направи декоративни панел за зид од три врсте дрвених плоча. Панел је састављен од квадрата, правоугаоника и правоуглог троугла. Димензије панела су следеће:

- Квадрат има страну од 51 cm.
- Правоугаоник има дужину од 80 cm, а ширина је две трећине од стране квадрата.
- Једна катета правоуглог троугла једнака је ширини правоугаоника, а друга катета је 40 cm.

а) Изрази ширину правоугаоника преко стране квадрата и израчунај њену вредност.

б) Колика је укупна површина панела у квадратним сантиметрима (cm²)?

в) Претвори укупну површину панела у m².

г) Ако Сара жели да премази заштитним лаком само квадрат и правоугаоник, колика је површина коју треба да лакира у dm²?



Решење:

а) Израчунавање ширине правоугаоника преко стране квадрата:

Према услову задатка, ширина правоугаоника је $\frac{2}{3}$ од стране квадрата, односно $\frac{2}{3} \cdot 51 \text{ cm} = 34 \text{ cm}$.

б) Израчунавање површине квадрата: $P_k = a^2$, одакле се добија $P_k = 50^2 = 2500 \text{ cm}^2$

Израчунавање површине правоугаоника: $P_p = \text{дужина} \cdot \text{ширина} = 80 \cdot 34 = 2720 \text{ cm}^2$

Израчунавање површине правоуглог троугла: $P_t = \frac{34 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm}}{2} = 680 \text{ cm}^2$

Укупна површина панела:

$$P = P_k + P_p + P_t = 2500 + 2720 + 680 = 5900 \text{ cm}^2$$

в) Претварање укупне површине у m²:

Знаш да је $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$, онда $P = 5900 : 10\,000 = 0,59 \text{ m}^2$

г) Површина за лакирање је збир од површина квадрата и правоугаоника,

$$\text{односно } P = 2500 \text{ cm}^2 + 2720 \text{ cm}^2 = 5220 \text{ cm}^2 = 52,20 \text{ dm}^2$$

Задатак 4

На аутопуту треба да се постави саобраћајни путни знак од правоугаоне металне плоче са димензијама 2 m и 1,2 m. На плочи треба да се исече отвор у облику правоуглог троугла са катетама 1,2 m и 0,8 m. Колика је површина метала која остаје, изражена у cm^2 ?

Два различита сложена 2Д-облика састављена од квадрата, правоугаоника и правоуглих троуглова имају исту површину. Да ли то значи да ти облици морају имати исти обим? Објасни свој одговор са примером.

Сада, покушај да процениш своје вештине у израчунавању површине сложених 2Д-облика. Које су твоје јаке стране, а шта треба да побољшаш?

Самосталан рад

1. У једном складишту треба да се складиште картонске кутије, при чему основа сваке кутије има димензије 50 cm и 30 cm. Складиште има подну површину од 24 m^2 . Колико кутија може да се постави на под?
2. Треба да се фарбају две просторије од којих једна има правоугаоне зидове са странама 6 m и 2,5 m, а друга у облику квадрата са страном од 6 m. Израчунај укупну површину за фарбање и изрази је у cm^2 . Колико литара боје ће бити потребно ако за 5 m^2 треба 1 литар боје?
3. Један парк има цветну башту у облику квадрата са страном 12 m. Око баште се поставља стаза ширине 2 m. Израчунај укупну површину баште и стазе и изрази је у cm^2 .
4. На један трпезаријски сто у облику правоугаоника са странама 1,8 m и 0,9 m поставља се чаршав у облику једнакокраког правоуглог троугла са катетом 15 cm.
 - а) Колика је површина чаршава, изражена у mm^2 ?
 - б) Колико квадратних центиметара трпезаријског стола ће остати непокривено?
5. Под једне сале је правоугаоник са димензијама 8,5 m и 6 m. Колико плочица са страном 20 cm ће бити потребно за покривање 70 % пода?
6. Један дизајнер прави украсна огледала. Она имају облик квадрата са страном 80 cm, али на два супрутна угла има дрвени украс у облику једнакокраког правоуглог троугла са катетама по 20 cm. Колика је површина дела који заузима само огледало (непокривени део)?

7. Прозори на једној кући састоје се од квадратних рамова са страном 1,5 m и правоугаоних стаклених отвора са димензијама 1,2 m и 0,8 m. Колика је површина дрвеног дела једног прозора и за 10 прозора?
8. У правоугаоној просторији са димензијама 5 m и 4 m поставља се тепих са димензијама 3 m и 2 m. Колика површина просторије остаје непокривена? Изрази је у dm^2 .
9. Један грађевинац поставља бетонску основу у облику правоуглог троугла. Површина бетонске основе је 24 m^2 , а једна катета правоуглог троугла је 8 m. Колика је друга катета бетонске основе?
10. У једној башти се налази правоугаона цветна леја са површином од 15 m^2 и ширином од 3 m. Колика је дужина цветне леје?
11. Саобраћајни путни знак у облику правоуглог троугла има једну катету 1,2 m, а површина му је $0,72 \text{ m}^2$. Колика је друга катета знака?
- *12. Један дизајнер прави квадратну таблу са површином од $2,56 \text{ m}^2$. Колика је дужина стране табле?
- *13. Једна просторија у облику правоугаоника покривена је са 36 m^2 ламината, а дужина једне стране је четири пута већа од друге. Колико метара лајсни треба купити да се поставе уз сваки зид просторије?

Запремина и мерне јединице за запремину

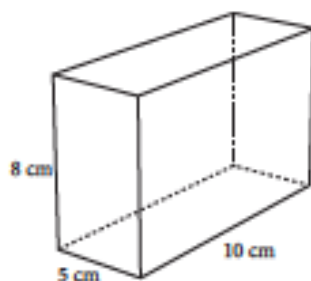
У овој лекцији ћеш се упознати са појмом запремина, односно мером за део простора који заузима неки 3Д-облик. Научићеш које се мерне јединице користе за запремину, њихове ознаке и односе међу њима. Научено ће ти помоћи да израчунаваш запремину и користиш мерне јединице у свакодневном животу, као и у математичким задацима које ћеш решавати.



Пример 1

На цртежу је дата кутија у облику правоугаоног паралелопипеда. Одговори на следећа питања:

- Колика је дужина кутије?
- Колика је ширина кутије?
- Израчунај површину зида кутије који има дужину 10 cm и ширину 5 cm.
- Колико зидова има кутија са дужином 10 cm и ширином 5 cm?
- Објасни која димензија чини да кутија буде 3Д-облик.



Решење:

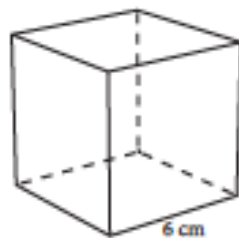
- Должината на кутијата е 10 cm.
- Ширината на кутијата е 5 cm.
- $P = 10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$.
- Кутијата има два зида са дужином 10 cm и ширином 5 cm.
- Кутијата е са три димензије (10 cm, 5 cm, 8 cm) затоа велиме дека кутијата е 3Д-форма (тридимензионална), односно таа опфаќа дел од просторот во кој се наоѓа.

Задатак 1

На цртежу је дата коцка.

Одговори на следећа питања:

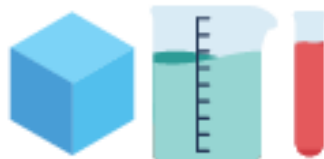
- Колика је дужина сваке ивице коцке?
- Израчунај површину једног зида коцке.
- Који предмети које користиш у свакодневном животу личе на коцку? Наведи бар два примера.



Свако чврсто тело има свој облик, величину и положај.

Течна и гасовита тела немају стален облик.

Њихов облик зависи од посуде у којој се налазе.

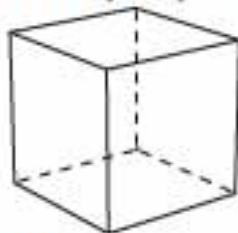


Део простора који заузима један 3Д облик назива се његова запремина.

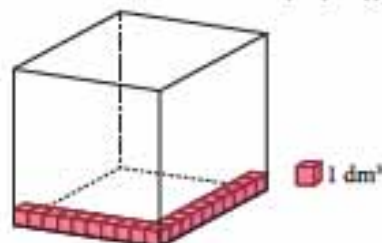
Пример 2

Мере јединице за запремину изведене су из мера за дужину.

а) Колика је запремина коцке са ивицом од један метар?



б) На цртежу је дата празна коцка са запремином 1 m^3 . Колико коцки са запремином 1 dm^3 би могло да се смести у кутију од 1 m^3 ?



Решење:

а) Волуменот на коцката со раб 1 m е изразен како $1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$, а тоа е 1 m^3 .
Објасни зошто.

Волуменот на коцка со раб еден метар (единична коцка) е за основна единица мерка која се нарекува метар кубен и се означува со 1 m^3 .

Одређивање запремине неке 3Д форме значи, у ствари, да се одреди колико јединичних коцки са ивицом јединице дужине се налазе у даатој 3Д форми.

б) Са горњег се запажа да у један ред коцке могу да се поређају $10 \cdot 10 = 100$ коцки са ивицом од 1 dm . Зашто?

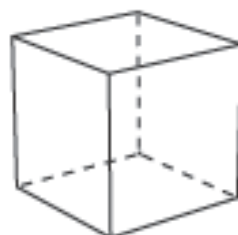
Зато што је висина коцке 1 m , односно 10 dm , тада по висини могу да се поређају 10 редова са по 100 коцки, или $10 \cdot 100 = 1000$ коцки.

Можемо закључити да је $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

Задатак 2

- а) На цртежу је дата празна кутија у облику коцке са ивицом од 1 dm. Колико укупно мањих кутија у облику коцке са ивицом од 1 cm можеш да поређаш у кутију са ивицом од 1 dm?



Решавањем примера 2 и задатка 2 може се закључити да свака наредна мера за запремину је 1 000 пута већа или мања од претходне, у зависности од тога да ли се крећемо ка већим или мањим јединицама.

На пример:

1 метар кубни (1 m^3) = 1 000 дециметара кубних ($1\,000 \text{ dm}^3$)

1 дециметар кубни (1 dm^3) = 1 000 сантиметара кубних ($1\,000 \text{ cm}^3$)

1 сантиметар кубни (1 cm^3) = 1 000 милиметара кубних ($1\,000 \text{ mm}^3$)

Ово значи да увек када се крећемо од веће ка наредној мањој мерној јединици за запремину, множимо мерни број са 1 000, а када се крећемо од мање ка наредној већој мерној јединици, делимо са 1 000.

Пример 3

Дата је коцка са запремином 3 dm^3 .

- Запиши запремину коцке у cm^3 .
- Запиши запремину коцке у m^3 .
- Узми посуду у облику коцке са запремином 1 dm^3 и сипај воду. Колико воде стане у посуду?

Решење:

$$\text{а) } 3 \text{ dm}^3 = (3 \cdot 1000) \text{ cm}^3 = 3000 \text{ cm}^3 \qquad 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$\text{б) } 3 \text{ dm}^3 = (3 : 1000) \text{ m}^3 = 0,003 \text{ m}^3 \qquad 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

в) Ако у посуду у облику коцке са запремином 1 dm^3 сипаш воду, а затим ту воду проспеш у мерну посуду (суд за мерење течности као на слици), прочитаћеш да је у посуду стало 1 литар воде.



$$1 \text{ литар} = 1 \text{ dm}^3$$

Као што знаш од раније, литар је јединица за запремину која се користи за мерење течности и гасова.

Ако $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$, онда $1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3$.



Задатак 3

У једном резервоару има запремину од 6 dm^3 воде. Колико литара воде има у резервоару?

Задатак 4

У фабрици за паковање воде једна пластична посуда садржи 3 m^3 воде. Вода треба да се расподели у мање пластичне посуде, тако да свака садржи 5 литара. Колико паковања од 5 литара ће бити потребно?

Упутства:

- Израчунај колико dm^3 има у 3 m^3 .
- Израчунај колико литара воде има у 3 m^3 .
- Израчунај колико паковања од по 5 литара ће бити потребно да се распореди целокупна количина воде.

Задатак 5

Нови акваријум за рибе у ЗОО-врт има облик квадрата са запремином 1 m^3 .

- а) Израчунај колико литара воде ће бити потребно да се напуни акваријум.
- б) Колико контејнера са капацитетом од 20 литара ће бити потребно да се напуни цео акваријум?

У свакодневном животу често се сусрећеш са 3Д-облицима као што су коцка и квадрат.

Како можеш да повежеш јединице за запремину (метри кубни, дециметри кубни, сантиметри кубни и литре) са примерима из свакодневног живота? Каква је важност ових мерних јединица за различите ситуације? Како претвараш кубне метре у литре? Које су друге везе и која од њих ти је најлакша и зашто?

Одговори на питања у својој свесци. Ако је одговор НЕ, врати се на део лекције на који се питање односи.

1. Да ли разумем јединице за запремину и њихове везе? Да / Не
2. Да ли сам успео да решим задатке у којима треба да користим везу између метара кубних, дециметара кубних, сантиметара кубних и литара? Да / Не
3. Какве додатне вежбе или примере бих волео да погледам да побољшам своје разумевање запремине и везе између јединица за запремину? (Напиши кратак одговор)

Самосталан рад

1. Претвори $12,5 \text{ m}^3$ у дециметре кубне (dm^3).
2. Претвори у литре (L) $5\,000 \text{ dm}^3$.
3. Колико центиметара кубних (cm^3) је 2 dm^3 ?
4. Колико метара кубних (m^3) је $8\,000 L$ воде?
5. У једној бачви има 5 m^3 течности. Колико литара течности има у бачви?
6. Претвори $0,25 \text{ dm}^3$ у cm^3 .
7. Колико метара кубних (m^3) има $3\,000 \text{ cm}^3$ песка?
8. Истражи месечну потрошњу воде твоје породице. У којој мерној јединици је изражена потрошена вода? Претвори у друге мерне јединице (на пример: литре, килолитре, метре кубне).
9. Који од датих волумена: 1 dm^3 , 10 cm^3 , 100 cm^3 , $1\,000 \text{ mm}^3$ је највећи?
10. Који од датих волумена: 2 dm^3 , 300 cm^3 , 400 mm^3 , $0,4 \text{ m}^3$ је најмањи?
11. Да ли се запремина од $6\,000\,000 \text{ cm}^3$ може записати као $0,6 \text{ m}^3$? Објасни свој одговор.
12. Користи један од знакова: $>$, $<$, $=$ да упоредиш парове бројних вредности за запремину.
 - а) $0,5 L$ и $\frac{1}{2} \text{ dm}^3$
 - б) 340 cm^3 и 2 dm^3
 - в) $1\,500 \text{ cm}^3$ и $2 L$
 - г) 820 dm^3 и $0,4 \text{ m}^3$

Волумен на квадар и на коцка

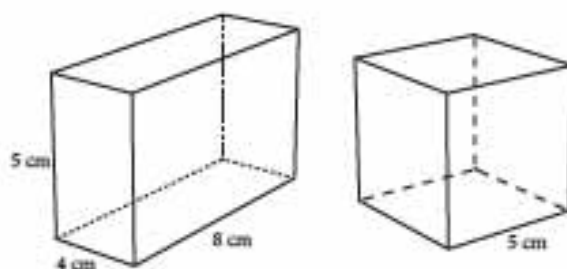
Они су присутни у многим ситуацијама – од процене простора који заузима нека кутија до израчунавања количине течности коју може да прими резервоар у облику квадара. Да би успешно извршавао ова израчунавања, важно је да разумеш основне формуле за запремину коцке и квадара. Управо ова лекција ће ти помоћи да савладаш ову кључну вештину.



Пример 1

На школском такмичењу за израду поклона твој задатак је да направиш пакетиће са колачима за другаре. Колачи треба да се ставе у мале кутијице које имају облик коцке или квадрара.

- Како би описао облике ових кутија (шта је коцка, а шта је квадрат)?
- Колико страна и које 2Д-облике има свака од кутија?



Решење:

- Користи цртеж и објасни шта је квадрат, а шта коцка.
- Квадар и коцка имају 6 страна. Са цртежа запиши које 2Д-облике има квадрат, а које коцка.

Пример 2

Тим за уређење школске учионице жели да направи дрвене кутије за школски прибор, а свака кутија да има облик квадрара или коцке.

- Једна дрвена кутија има облик квадрара. Дужина кутије је 12 cm, ширина је 8 cm, а висина је 5 cm.

Питања:

- Колико малих коцки са ивицом 1 cm стаје у њу?
 - Изведи формулу за запремину квадрара помоћу дужине, ширине и висине.
- Друга дрвена кутија има облик коцке са ивицом од 6 cm. Изведи формулу за запремину коцке.

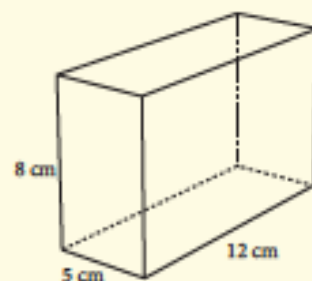
Решење:

- Прва кутија за прибор има облик квадрара. Ако свака мала коцка има запремину од 1 cm³, број коцки које ће стати у њу једнак је бројној вредности запремине квадрара.

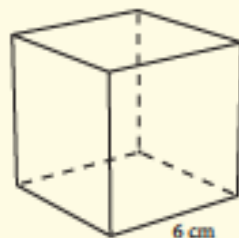
Број коцки које могу да се поређају у основи квадрара по дужини и ширини је $12 \cdot 8$, а пошто има 5 таквих редова, добија се укупно $12 \cdot 8 \cdot 5 = 480$ коцки са запремином од 1 cm³. Тих 480 коцки попуњавају кутију у облику квадрара, односно запремина квадрара је 480 cm³. Значи, запремина квадрара = дужина · ширина · висина.

Ако запремину, дужину, ширину и висину квадрара означимо са V , a , b , c редом, онда је $V = a \cdot b \cdot c$.

$$V = 12 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 480 \text{ cm}^3.$$



- б) Пошто је овог пута кутија коју треба да се направи у облику коцке, а коцка је квадар са једнаким димензијама ($a = b = c$), у формули за запремину квадара, када ширину и висину означимо са a , исто као и дужину, добијамо $V = a \cdot a \cdot a = a^3$. Пошто је ивица коцке $a = 6$ cm, добија се $V = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ cm³. Значи, запремина коцке је 216 cm³. Кутија може да прими 216 коцки са запремином од 1 cm³.



Задатак 1

Базен у облику квадара има димензије 10 m, 5 m и 8 m. Колико литара воде може да прими базен?

Задатак 2

Врати се на Пример 1 и одговори на следеће питање: Коју кутију ћеш изабрати ако треба да ставиш колаче у кутију која може да прими више?

Пример 3

Ана је купила кутију у облику квадара да спакује поклон за своју пријатељицу. На кутији је писало да је дужина 20 cm, ширина 10 cm, а висина није наведена. Ана је знала да је запремина кутије 2000 cm³.

- Колика је висина кутије?
- Колико малих коцки са ивицом од 2 cm може да прими ова кутија?

Решење:

- Запремина кутије се израчунава формулом $V = a \cdot b \cdot c$. Ако у формулу замениш познате вредности за дужину и ширину кутије, добићеш $2\,000 = 20 \cdot 10 \cdot c = 200 \cdot c$, $c = \frac{2\,000}{200}$, $c = 10$. Значи, висина кутије је 10 cm.
- Запремина коцке је: $V = a^3$. Ако за a замениш 2 cm, добија се $V = (2\text{ cm})^3 = 8\text{ cm}^3$. Значи, запремина једне коцке је 8 cm³. Број коцки са ивицом 2 cm које може да прими велика кутија = запремина кутије : запремина једне коцке = $2000\text{ cm}^3 : 8\text{ cm}^3 = 250$. Значи, кутија може да прими 250 малих коцки.

Задатак 3

Књижара има ормаре у облику квадара са дужином 1,5 m, ширином 50 cm и висином 2 m. Власник жели да зна:

- Колика је запремина једног ормара?
- Ако свака књига заузима простор од 1500 cm³, колико књига може да прими један ормар?

Ако имаш две кутије са истом запремином, да ли оне морају да имају исте димензије? Објасни. Ако удвостручимо дужину странице коцке, како ће се променити њена запремина? Како ће утицати на запремину промена висине квадрата, ако дужина и ширина се не мењају?

Одговори у своју свеску и подели одговоре са једним од својих другова из разреда.

1. Да ли си сигуран у своје разумевање формула за запремину коцке и квадрата?
2. Који задаци су ти били лакши, а који тежи?
3. Где треба да се побољшаш у погледу рачунања запремине квадрата и коцке?
4. Размисли о ситуацијама из свакодневног живота где можеш да примениш запремину квадрата и коцке.

Самосталан рад

1. Израчунај запремину коцке са ивицом 15 cm.
2. Израчунај запремину квадрата са странама 12 dm, 15 dm и 18 dm.
3. Потребна ти је кутија у коју ћеш ставити све своје књиге. Кутија је у облику коцке са страном 30 cm. Колико књига можеш да ставиш у ову кутију ако знамо да једна књига заузима 400 cm^3 ?
4. Резервоар у облику квадрата има ивице дужине 4 m, 3 m и 2 m. Колико литара воде ће примити?
5. Тони жели да направи кутију за складиштење алата у својој башти. Кутија има облик квадрата, а дно кутије има површину од 4800 cm^2 . Израчунај запремину кутије ако је њена висина 50 cm.
6. Магацин има облик квадрата са дужином 3 m, ширином 2,5 m и висином 2 m.
 - а) Израчунај запремину магацина.
 - б) Ако у магацин треба да се сместе кутије у облику коцке са страном 50 cm, колико кутија највише може да се смести у магацин?
7. Камион је натоварен огревним дрветом. Колико кубних метара дрвета има у камиону ако су она поређана у облику квадрата са димензијама 3 m, 4 m и 1,5 m?
- 8.* У дворишту Јована налази се резервоар у облику коцке који се користи за прикупљање кишнице. Он прима 512 литара воде.
 - а) Колика је дужина странице резервоара?
 - б) Ако једног дана падне киша довољно да напуни резервоар до пола, колику запремину воде (у литрима) ће садржати резервоар?

Израчунавање површине коцке и квадрара из њихових мрежа

У свакодневном животу често се сусрећеш са предметима у облику коцке или квадрара, као што су кутије за поклоне, намештај и разна паковања. Да би сазнао колико је материјала потребно да се направи такав предмет или да се покрије, на пример, платном, треба да израчунаш његову укупну површину.



У овој лекцији ћеш научити како да користиш мреже коцке и квадрара да израчунаш њихову површину. Разгледаћеш примере из стварног живота и научићеш како да примењујеш формуле за укупну површину у различитим контекстима. Ово знање ће ти помоћи да разумеш и решаваш практичне проблеме повезане са дизајном, паковањем и израдом.

Пример 1

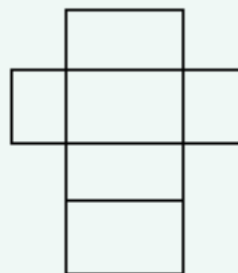
Марија израђује моделе кутијица за поклоне. Она користи листове папира да направи развијену мрежу квадрара. Једна од кутија коју је направила има дужину од 8 cm, ширину од 5 cm и висину од 4 cm.

Марија развија кутију у мрежу и добија 6 правоугаоника. Она жели да провери да ли је мрежа тачна и да ли може да се састави кутија.

- Колико правоугаоника са димензијама 8 cm и 5 cm ће садржати мрежа?
- Колико правоугаоника са димензијама 8 cm и 4 cm ће садржати мрежа?
- Колико правоугаоника са димензијама 5 cm и 4 cm ће садржати мрежа?
- Провери да ли су сви ови правоугаоници довољни да се састави кутија (квадар) и нацртај мрежу.

Решење:

- Постоје 2 правоугаоника са димензијама 8 cm и 5 cm. Ови правоугаоници су две велике стране квадрара.
- Постоје 2 правоугаоника са димензијама 8 cm и 4 cm. Ови правоугаоници су две дуге и уже стране квадрара.
- Постоје 2 правоугаоника са димензијама 5 cm и 4 cm. Ови правоугаоници су две мање стране квадрара.
- Мрежа квадрара има укупно 6 правоугаоника. Број и димензије правоугаоника су тачне за састављање квадрара.

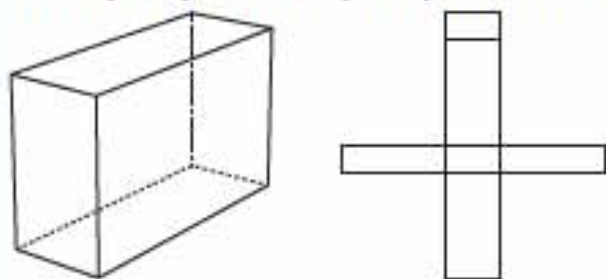


Задатак 1

Пронађи и измери димензије предмета у учионици који има облик коцке (на пример, кутија, књига, клупа...). Нацртај његову мрежу.

Пример 2

Колика је површина квадрата са дужином 4 cm, ширином 3 cm и висином 2 cm?



Решење:

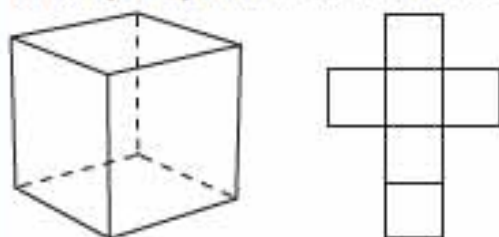
Имамо квадрат са дужином 4 cm, ширином 3 cm и висином 2 cm. Површина сваке стране је: $a \cdot b = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$, $a \cdot c = 4 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2$, $b \cdot c = 3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$.

Пошто од сваког правоугаоника има по два, укупна површина је $2 \cdot (12 + 8 + 6) = 2 \cdot 26 = 52 \text{ cm}^2$.

Формула за површину сваког квадрата може се записати: $P = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Пример 3

Колика је површина коцке са ивицом 3 cm?



Решење:

Из мреже се може видети да коцка има шест једнаких страна. Свака страна је квадрат са страном 3 cm. Површина сваког квадрата је $3^2 = 9 \text{ cm}^2$.

Укупна површина коцке је $6 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2$. Зашто?

Формула за површину сваке коцке може се записати: $P = 6a^2$

Задатак 2

Нацртај мрежу квадрата са дужином 6 cm, ширином 4 cm и висином 3 cm. Потом, користећи мрежу квадрата, израчунај његову површину.

Задатак 3

Нацртај мрежу коцке са ивицом 5 cm. Потом, користећи мрежу коцке, израчунај њену површину.

Пример 4

Мартин жели да офарба складиште у којем чува алат. Складиште је у облику квадрата и има дужину од 6 m, ширину од 4 m и висину од 3 m.

- Колика је укупна површина свих зидова складишта?
- Ако жели да офарба само три зида, израчунај њихову укупну површину.
- Колика је укупна површина пода и таванице заједно

Решење:

- а) Израчунавање укупне површине свих зидова:

$$P = 2 \cdot (6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 2 \cdot 54 = 108 \text{ m}^2$$

- б) Израчунавање за фарбање три зида:

Површина три зида (на пример, са димензијама 6 m и 3 m):

$$P = 18 \text{ m}^2 + 18 \text{ m}^2 + 12 \text{ m}^2 = 48 \text{ m}^2.$$

- в) Израчунавање укупне површине пода и таванице:

$$P = P_{\text{П}} + P_{\text{Т}} = 6 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} + 6 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 48 \text{ m}^2$$

Задатак 4

Давид жели да офарба све зидове складишта, али не и таваницу и под. Произвођач боје наводи да 1 литар боје може да покрије 5 m². (Користи Пример 4)

- Колико литара боје ће му бити потребно да офарба све зидове складишта?
- Ако свака канта садржи по 10 литара боје, колико канти боје треба да купи Давид?

Ако удвостручимо дужину ивице коцке, шта ће се догодити са њеном површином?
Како ти може помоћи мрежа квадрата да брже израчунаш његову површину?

Оцени своје знање о површини квадрата и коцке. Поново се врати на делове лекције у којима ниси сигуран/на у своје знање.

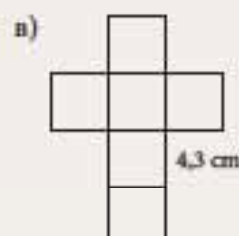
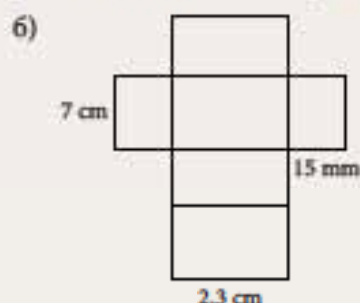
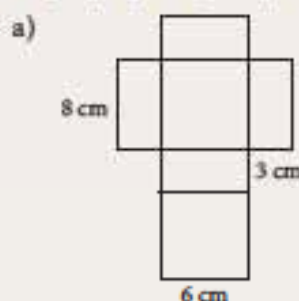
Оцена: 5 – Могу самостално да идентификујем странице, да израдим мрежу и тачно израчунам укупну површину квадрата и коцке.

Оцена: 3–4 – Понекад ми је потребна помоћ да нацртам мрежу квадрата и коцке и да направим тачне прорачуне површине.

Оцена: 1–2 – Имам потешкоћа у повезивању података и примени формула. Потребна ми је додатна помоћ и вежбање да у потпуности разумем и применим концепте.

Самосталан рад

1. Израчунај површину квадрата или коцке из датих мрежа:



- Укупна површина коцке је 150 cm^2 . Колика је ивица коцке?
- Једна страна коцке има површину 64 cm^2 . Израчунај укупну површину коцке.
- Основа квадрата је правоугаоник чија је површина 120 cm^2 . Ширина основе је 6 cm, а висина квадрата је 10 cm. Израчунај површину квадрата.
- Основа квадрата је квадрат са страницом 8 cm. Висина квадрата је 1 cm. Израчунај укупну површину квадрата.
- Површина једног зида коцке износи 36 cm^2 . Израчунај ивицу коцке и укупну површину коцке.
- Површина основе квадрата је 54 cm^2 , а ширина основе је 9 cm.
 - Израчунај дужину основе.
 - Ако је висина квадрата 10 cm, израчунај његову површину.

8. Коцка има запремину 343 cm^3 . Израчунај површину коцке.
- 9*. Квадар има: основу са површином од 50 cm^2 , предњи зид са површином од 70 cm^2 и висину 7 cm . Колика је укупна површина квадара?
- 10*. Површина једног бочног зида квадара је 60 cm^2 . Знамо да је висина квадара 8 cm и да је основа квадара квадрат. Израчунај страну основе и укупну површину квадара.
11. Соба Дејана је квадар чији бочни зидови су $7,5 \text{ m}^2$ и $10,5 \text{ m}^2$.
- Колика је површина пода ако је укупна површина собе 56 m^2 ?
 - Ако му је за један квадратни метар пода потребно 10 плочица, колико плочица му је потребно за цео под?
 - За један квадратни метар му треба $0,5 \text{ L}$ боје. Колико литара боје му је потребно за плафон?
12. Породица Петровски је купила акваријум у облику коцке за своје рибице. На ознаци пише да је укупна површина акваријума $7\,200 \text{ cm}^2$. Одреди дужину странице коцке и израчунај колико литара воде акваријум може да прими.
13. Емилија жели да направи кутију у облику коцке за поклон. Она користи картон и жели да страница кутије буде таква да укупна површина кутије буде 600 cm^2 . Одреди дужину странице коцке и израчунај запремину кутије.

Т Е М А
5

РАД СА ПОДАЦИМА



У свакодневном животу стално смо окружени подацима: колико ученика има у школи, колико времена проводимо у учењу, колико сунчаних дана је имало у месецу, резултати са спортског такмичења, колико пута смо посетили библиотеку. Када их прикупљамо, уређујемо и причамо о тим информацијама, у суштини, радимо са подацима.

Рад са подацима није само математика – то је моћна вештина која ће ти помоћи да размишљаш логично, да доносиш одлуке и да објасниш своје идеје другима.

„Математика је краљица наука, а статистика њена слушкиња.“

Резултати учења

Након проучавања ове теме бићеш способан/на да:

- ги применуваш операциите со множества во решавање проблеми;
- применуваш цели броеви и апсолутна вредност на цел број во секојдневен контекст;
- користиш аритметички закони и инверзни операции за да се поедностават пресметувањата со цели броеви;
- користиш степени со показател природен број и квадратен корен на одредени природни броеви во решавање проблеми;
- користиш врска меѓу дробки, децимални броеви и проценти при решавање проблеми од секојдневен контекст;
- решаваш проблеми од секојдневен контекст со операции со позитивни рационални броеви;
- решаваш проблеми со размер и правапропорционалност.

Планирање истраживања

У свакодневном животу често се суочаваш са ситуацијама у којима ти је потребно да донесеш закључке на основу података. На пример, када планираш породични излет, можеш да прикупиш информације о времену, популарним дестинацијама или мишљењима чланова породице. Слично томе, у науци и на послу планирање истраживања је основа за добијање тачних и корисних резултата. Овом лекцијом ћеш научити како да направиш план за истраживање, да израдиш и користиш инструменте за прикупљање података, као што су анкете, упитници и мерења.



Пример 1

Ученици у твом одељењу желе да сазнају које воће највише воле ученици у школи. Испланирај истраживање и одговори на следећа питања:

- Који начин прикупљања података ћеш користити: анкета, интервју, посматрање и сл.? Објасни зашто си изабрао/ла тај начин прикупљања података.
- Састави 3 питања за анкету или неки други инструмент.
- Прикупи податке од 10 ученика из свог одељења и прикажи их у табели.

Решење:

- Можеш да користиш анкету јер је то брз и ефикасан начин за прикупљање мишљења од већег броја ученика.
Анкета је лака за осмишљавање, а одговори се могу анализирати и визуелизовати помоћу табеле или дијаграма.
- Питања за анкету:
 - Које је твоје омиљено воће?
А) Јабука Б) Банана В) Поморанца Г) Друго _____
 - Колико често једеш воће?
А) Сваког дана
Б) Неколико пута недељно
В) Једном недељно
Г) Ретко
 - Да ли би волео/ла да у школској мензи има више воћа?
А) Да Б) Не

в) Одговори на питања од 10 ученика

Табела-Омиљено воће ученика			
Ученици	Прашања		
	Које је твоје омиљено воће?	Колико често једеш воће?	Да ли би волео више воћа у мензи?
1.	Јабука	Сваког дана	Да
2.	Банана	Неколико пута недељно	Да
3.	Поморанца	Сваког дана	Не
4.	Друго (грозђе)	Неколико пута недељно	Да
5.	Банана	Сваког дана	Не
6.	Јабука	Једном недељно	Да
7.	Јабука	Сваког дана	Не
8.	Поморанца	Ретко	Да
9.	Банана	Сваког дана	Не
10.	Друго (киви)	Једном недељно	Да

Изабери дијаграм и прикажи податке за омиљено воће и које воће се највише конзумира.

Задатак 1

Откриј која је омиљена активност твојих другова током одмора.

- Како би започео истраживање?
- Који су ти подаци потребни?
- Како би прикупљао податке?

Истраживање је процес постављања питања, прикупљања података, њихове анализе и доношења закључака о одређеном проблему или теми. То је начин откривања нових информација или решавања одређених проблема кроз организован рад.

Истраживање ти помаже да научиш нешто ново, боље разумеш људе и ситуације око себе и доносиш одлуке на основу информација.

Пример 2

Твоја школа разматра организовање нове ваннаставне активности, али жели да сазна шта би ученицима било најзанимљивије. Теби је поверен задатак да урадиш истраживање како би открио коју активност ученици највише желе. Твој задатак је да направиш план истраживања, да израдиш инструмент за прикупљање података и да прикупиш информације од ученика.

Решење:

Да би направио план за истраживање, прати кораке и бележи у свеску оно што желиш да истражујеш.

Кораци за истраживање:

1. Идентификовање питања или проблема:
 - Прво, треба да одлучиш шта тачно желиш да сазнаш или истражиш.
Пример: „Која су најчешћа хобија ученика у нашој школи?“
2. Планирање истраживања:
 - Размисли о начину на који ћеш прикупити податке (анкета, интервју, посматрање).
 - Одлучи које алатке ћеш користити (упитник, анкета, табела).
 - Одреди кога ћеш укључити у истраживање (нпр. ученике из свог одељења).
3. Прикупљање података:
 - У овом кораку можеш да спроведеш анкету или интервјуе, да посматраш ситуације или да прикупљаш информације из књига и интернета. Пример: Направи анкету са питањима као што су: „Које је твоје омиљено хоби?“ или „Колико времена недељно посвећујеш хобију?“
4. Селекција и организовање података:
 - Поређај податке у табеле, дијаграме или спискове ради лакше анализе. У овом примеру прикажи колико ученика је изабрало свако хоби у дијаграму.
5. Анализа података:
 - Размисли шта ти показују прикупљени подаци.
 - Упореди различите одговоре и покушај да повежеш информације.
Пример: Ако је 60% ученика изабрало спорт као хоби, то може значити да је спорт најпопуларније хоби.
6. Доношење закључака:
 - Напиши шта си научио из истраживања.
 - Одговори на питање које си поставио на почетку.
Пример: „Најчешће хоби међу ученицима је спорт, затим следе музика и уметност.“
7. Презентовање резултата:
 - Направи извештај или презентацију да поделиш резултате са другима.
Пример: Користи табеле, дијаграме и кратак текст да објасниш резултате.



идентификовање
проблема



планирање
истраживања



прикупљање
података



организовање
података



анализа
података



доношење
закључака

Задатак 2

Проблем за истраживање: Како различити фактори животне средине утичу на раст биљака?

У седмом разреду учиш о животној средини, екосистемима и факторима који утичу на жива бића. Твоје истраживање нека буде усмерено на то како фактори као што су светлост, вода, температура и земљиште утичу на раст биљака. Направи план за истраживање.

За истраживање које си направио/на, размисли и одговори на следећа питања: Да ли је циљ истраживања био јасно дефинисан? Колико је био ефикасан изабрани метод за прикупљање података? Шта би урадио/ла другачије следећи пут?

Оцени себе према следећим критеријумима:

- Јасно дефинисан план (1–5).
- Креативност у избору инструмента (1–5).
- Применљивост резултата истраживања (1–5).

Самосталан рад

Изабери предмет и проблем за који ћеш направити истраживање:

1. Биологија

- Како различите врсте земљишта утичу на раст биљака?
- Која врста хране даје највише енергије током спортских активности?
- Како загађење утиче на квалитет воде у локалним рекама?

2. Хемија

- Који напатак изазива највећу промену рН вредности на зубима?
- Како различити растварачи утичу на растворљивост шећера?
- Да ли су кућно направљена средства за чишћење једнако ефикасна као комерцијална?

3. Физика

- Да ли различити материјали од којих су направљени судови утичу на топлотну изолацију воде у њима?
- Како подлога утиче на брзину кретања тела по њој?
- Који тип папира прави најбољи авион за најдужи лет?

4. Географија

- Како климатске промене утичу на годишња доба у твом региону?
- Како различите врсте рељефа утичу на температуре у оближњим местима?
- Који су најчешћи природни ресурси у твојој околини и како се користе?

5. Историја

- Како се разликују животни услови у различитим епохама (нпр. средњи век и савремено доба)?
- Како је развој технологије утицао на комуникацију у прошлости?
- Који историјски догађаји су имали највећи утицај на локалну заједницу?

6. Техничко образовање

- Који од материјала — дрво, пластика или папир — је најпрепоручљивији за обраду у наставном предмету техничко образовање?
- Како соларни панели могу да се користе за смањење потрошње електричне енергије?
- Које су предности и мане различитих врста обновљивих извора енергије?

7. Математика

- Како се разликује просечна дневна температура током једног месеца у различитим регионима?
- Који су математички појмови најзаступљенији у свакодневном животу?
- Како се геометријски облици користе у архитектури локалних зграда?

8. Информатика

- Како се може повећати безбедност ученика на интернету?
- Да ли различити типови датотека (JPEG, PNG) мењају квалитет слика?
- Како се софтвери за обраду података могу користити за анализу анкета?

Прикупљање и организовање података за истраживање

Да ли си се икада потрудио да направиш табелу са именима и омиљеним активностима својих другара? Прикупљање података је први корак ка добијању информација које можеш да анализираш и да извучеш закључке. У овој лекцији подсетићеш се како да прикупљаш и организујеш податке на начин који је кључни корак у истраживачком процесу.



Пример 1

Ученици шестог разреда направили су анкету да би сазнали колико сати дневно њихови школски другови проводе гледајући телевизију. Податоци које су прикупили су следећи (измерено у сатима): 1, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 2, 1, 3, 4

Помози им да организују податке у табелу фреквенције.

Решење:

Корак 1: Груписање података

Прво, идентификујемо све различите вредности у подацима (1, 2, 3, 4 сата).

Корак 2: Бројање фреквенција

Броји се колико пута се свака вредност појављује у подацима:

1 сат: 4 пута; 2 сата: 6 пута; 3 сата: 6 пута и 4 сата: 4 пута

Или може овако да се саберу подаци: 1 сат: *////*; 2 сата: *//// /*; 3 сата: *### /* и 4 сата: *////*

Корак 3: Попуњавање табеле

Табела фреквенције изгледа овако:

Часови provedени у гледању ТВ-а	
Број сати (x)	Фреквенција (f)
1	4
2	6
3	6
4	4

Корак 4: Анализа табеле

- Највећи број ученика (6) гледа телевизију 2 или 3 сата дневно.
- Мањи број ученика (4) гледа телевизију 1 или 4 сата дневно.

Задатак 1

Ученици једне школе били су анкетирани о месту где се хране док су у школи

- а) Допуни табелу у својој свесци.
 б) На који начин се највише хране ученици?
 в) Направи друга поређења.

Место где се хране ученици		
Начин исхране	Знак	Број ученика
Школска кухиња	### ### ### ### #	
Ближа сендвичара	### ### ### ### /	
Храна од куће	### ### ### ///	
Не хране се	### ### †	
Укупно		

Пример 2

У школској библиотеци, ученици су желели да сазнају колико књига читају њихови саученици за један месец. Сакупили су податке од 30 ученика и добили следеће бројеве прочитаних књига: 7, 3, 5, 4, 2, 6, 8, 7, 3, 5, 5, 10, 2, 4, 6, 7, 1, 8, 4, 5, 3, 6, 7, 9, 6, 3, 2, 6, 5, 4.

При прикупљању ових вредности, урађено је пребројавање (бројање) прочитаних књига. За овакве податке кажемо да су дискретни подаци.

Дискретни податоци се податоци што можат да примат само одредени броени вредности (на пр., број на књиги, тактори, клупи).

- а) Групиши податке у интервале по 2 према броју прочитаних књига.
 Подсети се: Шта је интервал?
 б) Направи табелу фреквенције која приказује интервале и колико ученика припада сваком интервалу.
 в) Анализирај табелу и одговори: У ком интервалу има највише ученика? У ком интервалу има најмање ученика?

Решење:

Корак 1: Груписање података у интервале

Организујемо добијене вредности у групе :

1–2 књиге; 3–4 књиге; 5–6 књиге; 7–8 књига и 9–10 књига.

Зашто је корисно да групишемо податке у интервале?

- Да бисмо избегли непрегледне табеле са много редова за сваку појединачну вредност, можемо да групишемо податке у интервале.
- При великом броју података, груписање поједностављује и организује информације ради лакше анализе.
- Са интервалима можемо лакше да анализирамо који интервал вредности је најчешћи (има највећу фреквенцију) и како су подаци распоређени.

Корак 2: Бројање фреквенција у сваком интервалу

1–2: 4 ученика; 3–4: 8 ученика; 5–6: 10 ученика; 7–8: 6 ученика и 9–10: 2 ученика

Корак 3: Табела фреквенције

Број прочитаних књига за 1 месец	
Интервал (број књига)	Фреквенција (број ученика)
1 - 2	4
3 - 4	8
5 - 6	10
7 - 8	6
9 - 10	2
Укупно	30

Корак 4: Анализа табеле

Највише ученика (10) припада интервалу 5–6 књига, што значи да је највећи део ученика прочитао 5 или 6 књига. Најмање ученика (2) припада интервалу 9–10 књига.

Груписање података се увек ради у интервалима једнаке дужине.

Груписање података се увек ради у интервалима једнаке дужине (сваки интервал има исти ранг података).

Задатак 2

Ученици истражују колико времена њихови саученици из одељења троше на путовање до школе. Спровели су анкету и добили следеће одговоре (у минутима):

2, 23, 14, 18, 36, 21, 3, 7, 10, 15, 26, 24, 3, 16, 28, 9, 14, 32, 10, 22, 17, 5, 11, 6, 15, 8, 9, 17, 20, 16, 7, 30.

- Групиши податке у интервале дужине по 10 минута и креирај табелу фреквенције за број ученика у сваком интервалу.
- Користећи табелу, одговори: Који временски интервал је најчешћи (у ком путује највише ученика)? Који временски интервал је најређе заступљен?
- Размисли и предложи два разлога зашто ученици путују различито време до школе.

Како је груписање података у интервале помогло да се извуку важне информације о подацима? Размисли да ли постоји други начин прикупљања података осим бројања? Наведи примере података који могу да се добију мерењем неким мерним инструментом.

Одговори на питања у својој свесци и подели их са једним од својих школских другова.

- Да ли сам правилно организовао/ла податке и груписао/ла у одговарајуће интервале?
 - Да, направио/ла сам табелу тачно и груписао/ла податке у одговарајуће интервале.
 - Почео/ла сам да правим табелу, али нисам изабрао/ла најприкладније интервале.
 - Нисам успео/ла да направим тачну табелу фреквенције.
- Да ли разумем процес избора интервала и како они утичу на анализу података?
 - Да, разумем зашто је важно да изаберам правилне интервале за податке и како они утичу на резултате.
 - Покушао/ла сам да изаберам интервале, али сам имао/ла потешкоћа да одредим најбољу, најоптималнију дужину интервала.
 - Нисам разумео/ла зашто и како да групишем податке у интервале.
- Да ли могу да анализирам табелу и извучем значајне информације из података?
 - Да, могу да анализирам табелу и извучем корисне информације (као што су најчешћи интервали, расподела података).
 - Могу да анализирам податке, али не увек на тачан начин.
 - Не могу да извучем значајне информације из табеле.

Самосталан рад

- На једној свињој фарми извршено је мерење 120 свиња и притом су добијене следеће вредности у kg:

86	90	90	92	90	93	90	91	91	86	86	86	86	87	87
92	93	90	87	90	88	90	93	87	88	93	90	91	88	89
93	88	86	90	89	88	89	91	88	85	91	92	92	90	90
93	91	85	92	85	85	91	92	89	87	89	92	90	87	90
92	85	92	91	86	90	86	93	87	91	87	85	87	89	87
85	90	89	88	90	87	88	86	88	91	91	93	86	87	91
88	90	88	90	91	93	89	91	89	90	87	91	92	92	91
84	85	92	84	86	88	93	90	89	87	84	92	90	87	92

- Групиши податке у интервале дужине 5 килограма и направи табелу фреквенције за број свиња у сваком интервалу.
- Користећи табелу, одговори: Који интервал има највише свиња и коликидео представља од укупног броја свиња? Који интервал има најмање свиња и колики део представља од укупног броја свиња?
- Донеси друге закључке.

2. Дате су висине 52 ученика у cm:

153	145	156	154	153	157	155	145	146	153	158	146	158
148	151	159	157	146	154	159	147	153	154	157	146	148
147	159	159	152	148	153	159	155	148	148	158	148	157
151	147	154	153	146	152	148	157	153	146	155	146	153

- а) Групиши податке.
 б) У ком интервалу има највише ученика, а у ком најмање?
 в) Број ученика у сваком интервалу запиши у процентима
 г) Зашто висина од 145,56 cm не може тачно да се појави међу дискретним подацима који су записани само у целим центиметрима?
3. Податке са датог дијаграма фреквенције представи у табелу фреквенције за груписане податке.



4. Дати су подаци о старости људи у аутобусу градског превоза:

2	11	21	79	32	42	63	51	59	43
55	63	13	50	22	57	25	29	32	58
38	45	51	67	16	61	43	57	60	51
8	55	37	59	35	56	59	33	28	30
40	53	49	74	18	48	19	26	78	62

- а) Представи их табелом фреквенције са груписаним подацима.
 б) Користећи табелу одговори: Која старосна група је најзаступљенија у градском превозу, а која најмање?
 в) По твом мишљењу, шта би могао да буде разлог зашто је та старосна група најзаступљенија у градском превозу?

Стубичасти и кружни дијаграм

Дијаграми су важна алатка за представљање прикупљених података јер омогућавају већу прегледност и јасноћу. Приликом цртања дијаграма користе се линије, геометријски облици, слике и други елементи како би подаци били приказани на разумљив начин. Циљ који треба да се постигне сваким дијаграмом јесте да он буде једноставан и јасан за све који су заинтересовани за проблем који је истраживан. У овој лекцији ћеш научити како да представљаш податке кружним дијаграмом, да их анализираш на једноставан и визуелно привлачан начин.



Пример 1

Стубичастим дијаграмом је дато како је једна породица расподелила зараду у месецу новембру 2024. године.

- Према стубичастом дијаграму, на шта је породица потрошила највише, а на шта најмање у новембру 2024. године?
- Да ли се може закључити да је породица уштедела у месецу новембру 2024. године? Објасни свој одговор.



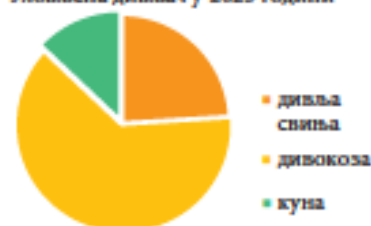
Решење:

- Према стубичастом дијаграму, породица је у месецу новембру 2024. Године највише потрошила на храну, а најмање на забаву.
- Према дијаграму, укупни трошкови износе $51 + 11 + 28 + 6 = 96\%$, што значи да је породица у новембру 2024 године уштедела 4% од укупне зараде.

Задатак 1

- Која дивљач је највише уловљена у 2023. години?
- Направи и друга поређења.
- Које друге врсте дивљачи постоје у РС Македонији?

Уловљена дивљач у 2023 години



Пример 2

У једном одељењу седмог разреда има 36 ученика, од којих је 17 девојчица, а 19 дечака. Прикажи податке кружним дијаграмом.

Решење:

Према подацима, у примеру постоје две категорије: дечаци и девојчице. Значи, кружни дијаграм ће бити подељен на два дела (секторе). Да бисмо одредили величину сваког дела, прво одређујемо угао који представља једног ученика. Пун угао круга 360° делимо са укупним бројем ученика ($19 + 17 = 36$), за које припремамо кружни дијаграм, да бисмо одредили колики централни угао одговара једном ученику, односно $360^\circ : 36 = 10^\circ$.

Делови у кружном дијаграму имају следеће углове:

- За девојчице: $17 \cdot 10^\circ = 170^\circ$.
- За дечаке: $19 \cdot 10^\circ = 190^\circ$.

Добивене централне углове цртамо у кругу произвољног радијуса, писмо наслов дијаграма и легенду која показује како су означени представљени подаци.

Састав одељења



Пример 3

У табели 1 приказано је како су распоређена средства од лутрије. Прикажи податке кружним дијаграмом.

Табела 1: Расподела средстава од лутрије

	%
Држава	40
Награде	35
Комисије	10
Остало	15

Решење:

1. Да бисмо нацртали кружни дијаграм када су подаци дати у процентима, прво одређујемо колики централни угао одговара датом проценту (види табелу 1). На пример: 40% од $360^\circ = 0,4 \cdot 360^\circ = 144^\circ$.
2. Потом помоћу угломера цртамо сваки угао у кругу који одговара свакој категорији (држава, награде, комисије и остало). На крају означавамо делове круга (правимо легенду) и пишемо наслов (име) дијаграма.

Табела 2: Израчунавање угла за сваку категорију

	%	агол
Држава	40	$0,40 \cdot 360^\circ = 144^\circ$
Награде	35	$0,35 \cdot 360^\circ = 126^\circ$
Комисије	10	$0,10 \cdot 360^\circ = 36^\circ$
Остало	15	$0,15 \cdot 360^\circ = 54^\circ$

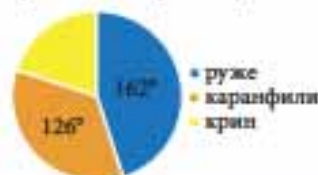
Расподела новца од лутрије



Пример 4

Са кружним дијаграмом је дата продаја 3 врсте цвећа у цвећарници „Анемона“. Ако је познато да је продато укупно 720 комада резаног цвећа, прикажи податке табелом.

Продато цвеће у цвећарници



Решење:

Одређујемо колики централни угао одговара 1 комаду резаног цвећа. На укупан број од 720 цвећа одговара угао од 360° . Значи, за сваки цвет одговара угао $360^\circ : 720 = 0,5^\circ$.

Потом треба измерити угао за сваку категорију и записати у табелу. Да бисмо одредили колики је број цвећа у свакој категорији, делимо угао категорије са углом за 1 комад. На пример, за број продатих ружа $162 : 0,5 = 324$. Слично за остале врсте цвећа.

Табела 3: Продато цвеће у цвећарници „Анемона“

Цвеће	Угао	Број цвећа
Руже	162°	324
Каранфили	126°	252
Крин	72°	144

Постоје и други начини да се израчунају вредности за попуњавање табеле. Покушај да објасниш следеће: $162^\circ : 360^\circ = 0,45 = 45\%$; 45 % од 720 је 324.

Задатак 2

Уредници једне локалне телевизије желе да знају какав је интерес за различите емисије програма. У табели 2 дати су подаци из истраживања.

- Прецртај табелу у твојој свесци.
- Прикажи податке кружним дијаграмом.

Табела 4: Временска заступљеност емисија на програму једне ТВ

	%	угао
Рекламе	25	
Вести	15	
Музика	20	
Спорт	10	
Филмови	30	

Задатак 3

Поводом крсне славе школе, ученици су учествовали у разним спортским активностима. Резултати учешћа су приказани у следећој табли:

Учешће у школским спортским активностима	
Спортска активност	Број ученика
Фудбал	35
Кошарка	20
Трчање	25
Рукомет	15
Друго	25

Прикажи податке из табеле помоћу кружног дијаграма, где ћеш поред сваког сектора написати одговарајући проценат ученика који су учествовали у одређеној спортској активности.

Упутство:

1. Израчунај укупан број ученика који су учествовали у спортским активностима.
2. Израчунај проценат ученика који су учествовали у свакој од поменутих активности.
3. Нацртај кружни дијаграм, при чему ће сваки сектор имати величину која одговара проценту ученика који су учествовали у одређеној активности.

Задатак 4

У једном одељењу ученици су попунили анкету о својим омиљеним предметима. Подаци из анкете су приказани помоћу датог стубастог дијаграма.

Прикажи податке из стубастог дијаграма помоћу кружног дијаграма, где ћеш поред сваког сектора приказати и проценат ученика који су изабрали одређени предмет као омиљени.



Размисли како избор дијаграма (стубасти или кружни) може утицати на начин на који људи могу разумети податке. Који тип дијаграма би изабрао да прикажеш податке који показују делове целине и зашто?

Одговори на питања у својој свесци

1. Могу ли да прикажем податке одговарајућим типом дијаграма (стубасти или кружни)?
2. Обраћам ли пажњу на тачност рачуна и јасноћу приказа?
3. У чему бих могао да се побољшам при следећем покушају представљања података помоћу дијаграма?

Затим, ако у нечему ниси сигуран/сигурна, прегледај лекцију и коригуј своја знања и вештине.

Самосталан рад

1. Организација која се бави истраживањима у вези са животном средином дошла је до података који су записани у датој табели. Твој задатак је да одговориш на следеће захтеве:
 - а) Прецртај табелу у своју свеску и допуни је.
 - б) За који производ се користи највише од посечених стабала?
 - в) Колики део од укупно посечених стабала се користи за све производе?
 - г) Прикажи податке помоћу кружног дијаграма приказујући одговарајуће % за сваки сектор.

За шта се користе посечена стабла?	Потрошени део од посечених стабала (%)	%
Огрешно дрво	$\frac{1}{4}$	
Хартија	$\frac{1}{5}$	
Мебел	$\frac{3}{10}$	
Останато		

2. а) Информиши се колика је редовна цена опреме за излет у продавницама у твом месту и унеси је у табелу коју ћеш претходно прецртати у своју свеску.

Производи	Редовна цена	Снижена цена
Сто за сунчање		
Сточих		
Стол		
Кишобран		

- б) Ако има смањење редовне цене за $\frac{1}{3}$, одреди снижену цену за сваки производ и попуни табелу.
 - в) Податке о редовној цени и податке о сниженој цени прикажи помоћу стубастог дијаграма.
 - г) Колико динара ти је потребно да купиш све производе по њиховој редовној цени, а колико по сниженој цени?
3. У табели 3 је дато како је Маја распоредила своја средства у месецу мају 2024. године. Прикажи податке помоћу кружног дијаграма.

Распоред новца	Динари	%	Угао
Кирија	6000		
Превоз	2000		
Храна	12 000		
Остало	3000		
Уштеда	1500		

4. Анабела је бројала колико је књига прочитао сваки члан њене породице у једном месецу:

- Њен отац: 5 књига
- Њена мајка: 8 књига
- Њен брат: 3 књиге
- Њена сестра: 4 књиге

Нацртај стубасти дијаграм који ће приказати ове податке.

5. Владимир је анкетирао 40 ученика из школе о њиховом омиљеном спорту и добио:

- Фудбал: 16 ученика
- Кошарка: 10 ученика
- Одбојка: 8 ученика
- Пливање: 6 ученика

а) Прикажи податке у табели.

б) Прикажи ове податке помоћу кружног дијаграма.

6. Следећи стубасти дијаграм приказује колико гласова су добиле четири песме на школском такмичењу за најбољу песму. Прикажи податке помоћу кружног дијаграма.



7. У једној школи је спроведена анкета о омиљеним укусима сладоледа код ученика. Добијени подаци су приказани помоћу кружног дијаграма.

а) Представи податке у табели.

б) Нацртај стубасти дијаграм који ће приказати ове податке.

Омиљени укуси сладоледа



Цртање и тумачење линијског дијаграма и пиктограма

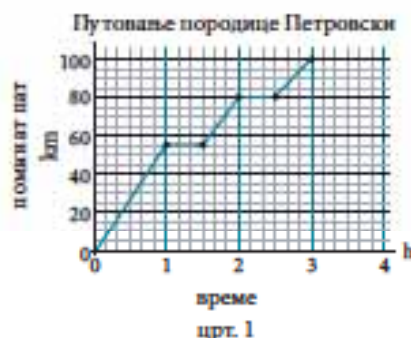
Два једноставна и ефикасна начина за визуелно представљање података су линијски дијаграм и пиктограм. Линијски дијаграм си у шестом разреду користио/ла за приказивање промена података током времена. Повезивањем тачака које представљају податке могао/ла си да пратиш тренд и да закључиш да ли се нека вредност повећава, смањује или остаје иста. У овој лекцији ћеш се упознати са дијаграмом пиктограмом и научићеш како да црташ и да тумачиш ова два типа дијаграма кроз примере из свакодневног живота.



Пример 1

Породица Петровски је путовала од града А до града Б, који су били удаљени 100 km. На цртежу 1 је дато растојање које су прешли у одређено време. Пронађи:

- растојање пређено у првом сату
- растојање пређено у другом сату
- укупно пређено растојање
- укупно време утрошено на одмор



Упутство: г) Укупно време утрошено на одмор је два пута по 30 минута, и то једном после једног сата од поласка и још једном после другог сата. Значи, породица Петровски је одмарала укупно 1 сат.

Пример 2

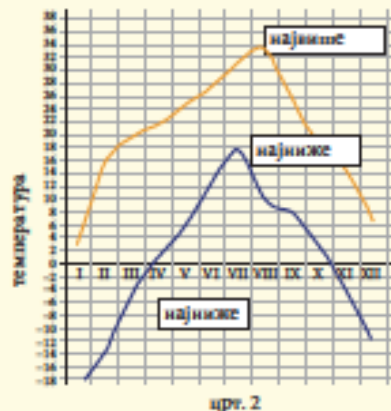
Да се графички прикажу подаци о највишој и најнижој просечној месечној температури у једном граду, дати у табели 1.

Табела – Највиша и најнижа температура по месецима

месец	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
највиша забележена температура (°C)	5	18	22	24	27	30	34	36	28	21	17	9
најнижа забележена температура (°C)	-18	-12	-3	3	8	15	20	12	10	5	-2	-10

Решење:

Да би се подаци графички приказали и уочиле разлике између највише и најниже температуре, неће бити довољан само први квадрант координатног система. Зато су дијаграми нацртани у првом и четвртном квадранту. На овај начин, графичким приказом ћемо имати могућност да уочимо и разлику између највише и најниже просечне температуре у датом граду (црт. 2).

**Пример 3**

Промене времена током једне недеље биле су бележене и приказане пиктограмом, а измерене температуре у табели.

Пиктограм за време по данима у једној недељи

Понедељак	Уторак	Среда	Четвртак	Петак	Субота	Недеља
☉	☉	☁	☁	☁	☉	☉

Табела – Температура по данима у једној недељи

Дан	Симбол	Температура (°C)
Понедељак	☉	28
Уторак	☉	30
Среда	☁	25
Четвртак	☁	22
Петак	☁	24
Субота	☉	29
Недеља	☉	31

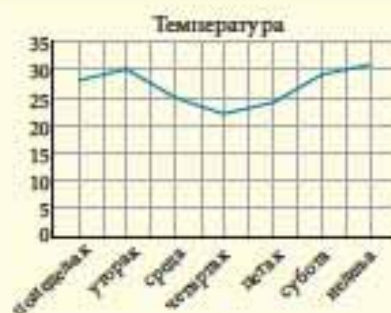
Пиктограм представља податке помоћу сличица или симбола, што га чини лаким за разумевање. Ова врста дијаграма је посебно корисна за визуелно поређење.

- Према пиктограму, који дан је био кишовит?
- Који дан је измерена најнижа температура?
- Који дан је био најтоплији?
- Да ли је увек када има сунца температура иста? Објасни.

- д) Према подацима, нацртај линијски дијаграм који ће приказати температуре током недеље.
- ђ) Како се мењала температура током недеље? Да ли можеш да препознаш тренд (да ли је температура расла, опадала или се мењала)?

Решење:

- а) Кишовит дан је четвртак јер има симбол ☁ за кишно време.
- б) Најнижа температура је 22°C , измерена у четвртак.
- в) Најтоплији дан је недеља, са температуром од 31°C .
- г) Не, иако у топлијим данима има сунца (понедељак, уторак, субота, недеља), из пиктограма се уочава да и у понедељак такође има сунца, али је температура нижа него у другим данима. Ово показује да осим сунца, на температуру могу да утичу и други фактори као што су ветар или влажност ваздуха.
- д) Линијски дијаграм за температуру је дат на цртежу.
- ђ) Температура је у уторак порасла у односу на понедељак. У среду и четвртак је значајно опала. Од петка до недеље поново је расла, достижући највишу вредност у недељу (31°C). Видимо да температуре нису сталне, већ се мењају током недеље.



Задатак 1

Један супермаркет прати продају различитих врста воћа током једне недеље. Подаци о броју продатих килограма приказани су пиктограмом, где сваки од симбола: 🍎, 🍌, 🍌 одговара 5 kg воћа.

Пиктограм за продају:

Понедељак	Уторак	Среда	Четвртак	Петак	Субота	Недеља
🍌 🍌 🍌	🍌 🍌	🍌 🍌 🍌	🍌 🍌 🍌	🍌 🍌 🍌 🍌	🍌 🍌 🍌 🍌	🍌 🍌 🍌 🍌 🍌

- а) Представи податке у табели.
- б) Који дан је продато највише килограма воћа?
- в) Који дан је било најмање продаје воћа?
- г) Која врста воћа се највише продавала током недеље?
- д) Да ли укупна продаја воћа током недеље може да се прикаже линијским дијаграмом? Објасни свој одговор. Изабери дијаграм којим ћеш приказати податке.
- ђ) Да ли има дана са истом укупном продајом воћа? Који су то дани?
- е) Како се мењала продаја воћа током недеље? Можеш ли да препознаш неки тренд (да ли је продаја расла, опадала или варијала)?

Пример 4

Ученици једне школе одлучили су да истраже колико времена дневно проводе у различитим активностима током једне недеље. Они су користили пиктограм да прикажу прикупљене податке.

Пиктограм:  = 1 сат

Активност	Пон.	Уто.	Сре.	Чет.	Пет.	Суб.	Нед.
Учење 	  	 	  	 	 		
Гледање ТВ 	 	 		 	  	   	  
Спорт  	 	 	 		  	  	 
Играње игара 	 	  		 	 	  	   

- Која активност је најзаступљенија током недеље?
- Која активност има најмање сати током недеље?
- У који дан је ученик провео највише времена испред екрана (гледање ТВ и играње игара)?
- У које дане је ученик провео исти број сати у учењу?
- Нацртај пиктограм за укупан број сати проведених у свакој активности током недеље, ако  = 2 сата.
- Анализирај: Да ли је време проведено у учењу и спорту довољно у поређењу са временом испред екрана? Шта би могло да се промени?
- Предложи нову недељну расподелу у којој ће све активности бити боље уравнотежене.

Решење:

Прво, израчунавамо укупан број сати за сваку активност током недеље:

Активност	Пон.	Уто.	Сре.	Чет.	Пет.	Суб.	Нед.	Укупно
Учење 	3	2	3	2	2	1	1	14 ч.
Гледање ТВ 	2	2	1	2	3	4	3	17 ч.
Спорт  	2	2	2	1	3	3	2	15 ч.
Играње игара 	2	3	1	2	2	3	4	17 ч.

- Гледање ТВ и играње игара су две најзаступљеније активности (по 17 ч.).
- Учење (14 ч.) је активност којој је посвећено најмање времена.
- У суботу и недељу (по 7 ч.).
- Понедељак и среда (по 3 ч.); субота и недеља (по 1 ч.).

д) Пиктограм за укупан број сати током недеље:

Легенда:  = 2 сата

Учење :          

Гледање ТВ :           

Спорт  :          

Играње игара :          

ђ) Време проведено испред екрана (34 сата) је много веће од времена за учење (14 сати) и спорт (15 сати). За бољи баланс, могуће је смањити време за ТВ и игре и додати више активности на отвореном или време за учење.

е) На пример:

Смањење гледања ТВ  на 10–12 сати недељно

Смањење играња игара  на 10–12 сати недељно

Повећање учења  на 16–18 сати

Повећање спорта   на 18 сати ради бољег здравља и активног живота

Треба да знаш како да распоредиш своје време да би имао бољи баланс између учења, рекреације и слободних активности. Ова анализа кроз пиктограм ти помаже да разумеш важност времена и његовог управљања.

Задатак 2

Један продавац на пијаци продаје различите врсте воћа и води евиденцију о броју продатих килограма сваког дана током једне недеље. Подаци су приказани у следећој табели:

Дан	Јабукe (kg)	Банане (kg)	Поморанџе (kg)	Грожђе (kg)
Понедељак	10	8	4	8
Уторак	12	10	7	6
Среда	9	7	6	8
Четвртак	16	12	8	9
Петак	14	10	6	10
Субота	20	20	16	13
Недеља	19	15	12	11

а) Која врста воћа се највише продавала током недеље?

б) Направи пиктограм где ће се за укупно продато воће по данима користити симбол  који представља 10 килограма?

в) Направи пиктограм где сваки симбол     представља 10 килограма.

г) Која врста воћа се најмање продавала током недеље?

д) Прикажи податке линијским дијаграмом за укупну продају по данима и анализирај који дани су имали нагло повећање или смањење продаје.

ђ) Шта можеш да закључиш о потрошачким навикама људи? Који дан има највише купаца и зашто?

Зашто су пиктограми корисни за приказивање података у односу на друге типове дијаграма?
У којим ситуацијама би било боље да користиш линијски дијаграм уместо пиктограма?

Препиши табелу у своју свеску и попуни је.

Вештина	Потпуно савладано ☑	Делимично савладано ⚠	Потребна ми је помоћ ✗
Цртање и тумачење пиктограма			
Цртање и тумачење линијског дијаграма			
Поређање различитих типова дијаграма			
Примењује дијаграме у реалним ситуацијама			

Кратко писмено размишљање:

1. Напиши једну ствар коју си научио о пиктограмима и линијским дијаграмима, која ће ти бити корисна у свакодневном животу.
2. Који део лекције ти је био најлакши, а који ти је био најизазовнији?

Самосталан рад

1. Једна продавница бицикала води евиденцију о броју продатих бицикала током шест месеци. Подаци су приказани у следећој табели:

Месец	Јануар	Фебруар	Март	Април	Мај	Јуни
Бицикли	12	18	25	30	50	60

- а) Пиктограмом прикажи податке.
 - б) Анализирај податке и објасни какав тренд се уочава.
 - в) У ком месецу је био највећи раст продаје? Шта мислиш, који фактори су могли да изазову тај раст?
 - г) Ако се тренд настави, предвиди колико бицикала би могло да се прода у јулу.
2. Замисли да треба да направиш систем за праћење физичке активности ученика у твојој школи. Прикупљаћеш податке о броју корака које направе сваки дан и представићеш их пиктограмом.
 - а) Предложи симболе за пиктограм (на пример,  за 1000 корака).

- б) Осмисли начин на који ученици могу да бележе своје кораке и како ће се то претворити у графички приказ.
- в) Направи пример пиктограма за податке из једне недеље за једног ученика.
- г) Размисли како би овај систем могао да мотивише ученике да буду активнији и предложи побољшања.

3. Разгледај следећу ситуацију: Једна група ученика жели да прикаже податке о омиљеним спортовима својих школских другова. Неки од њих одлучују да направе пиктограм, други бирају стубичасти дијаграм, а трећи кружни дијаграм.

- а) Процени који тип дијаграма је најпогоднији за ову ситуацију и зашто.
- б) Уколико треба да презентујеш податке на школској приредби пред већим бројем људи, који дијаграм би изабрао и зашто?
- в) Да ли постоје ситуације у којима пиктограм не би био најбољи избор? Објасни зашто.
- г) Направи критичку анализу добрих и лоших страна сваке врсте дијаграма у погледу читљивости, тачности и разумљивости података. Можеш да користиш табелу за бележење предности и недостатака сваког дијаграма.

4. Марија тренира атлетику и води евиденцију о времену (у секундама) које јој је потребно да претрчи 100 метара током једне недеље. Њени резултати су записани у табели:

Дан	Понедељак	Уторак	Среда	Четвртак	Петак	Субота	Недеља
Време (секунд)	18,5	18,3	18,0	17,8	17,5	17,4	17,2

- а) Прикажи податке линијским дијаграмом.
- б) Који дан је Марија имала најбоље време?
- в) Да ли се њено време побољшава током недеље? Објасни.
- г) Између која два узастопна дана је било највеће побољшање у времену?
- д) Какав тренд можемо да уочимо из овог дијаграма?
- ђ) Ако Марија настави да тренира истим темпом, шта можемо да очекујемо за њено време у наредним данима?

Модални разред и дијаграм фреквенције за груписане податке

У овој лекцији ћеш научити како да пронађеш важне информације, као што су мода, медијана и ранг, када су подаци груписани. Груписани подаци су они који су распоређени у групе или интервале како би били јаснији и лакши за анализу.

У овој лекцији ћеш научити како из оваквих података да изведеш значајне информације које можеш да примениш у свакодневним ситуацијама. На пример, замисли да си организатор школског догађаја и треба да одредиш најчешћу величину обуће ученика ради наручивања одговарајуће опреме. Осим тога, потребно је да знаш просечну величину и какав је опсег величина како би планирао наруџбине.



Пример 1

Ученици једног одељења желе да открију која је најчешћа висина у одељењу, као и да пронађу средњу вредност висине. Они су сакупили податке о висини (у cm) свих ученика у одељењу:

Сакупљени подаци о висини (у cm): 150, 155, 160, 165, 160, 170, 175, 160, 165, 155, 160.

Решење:

Мода (најчешћа вредност): 160 cm

Ранг (Разлика између највеће и најмање вредности): $175 - 150 = 25$ cm

Након ређања података по величини: 150, 155, 155, 160, 160, 160, 160, 165, 165, 170, 175.

Вредност која се налази у средини (шеста по реду) је 160 cm, па је медијана = 160 cm.

Додатна активност: Сакупите податке за неку другу карактеристику (нпр. величину обуће) и сами израчунајте ове вредности.

Задатак 1

Ана је мерила колико времена њене другарице проводе гледајући телевизију радним данима поподне (у минутима). Она је добила следеће податке: 30, 45, 60, 45, 30, 60, 45

- Који број минута је најчешћи (која је мода)?
- Која је медијана?
- Који је ранг података?

Пример 2

Ученици једног одељења желели су да сазнају колико им обично треба времена да стигну до школе. У ту сврху спровели су анкету и забележили времена (у минутима) која су им била потребна за путовање:

Сакупљени подаци (у минутима):

6	10	12	15	18	20	20	20	22	25
30	23	11	27	24	29	16	28	25	11
14	16	27	6	13	24	19	7	17	22

- Представи податке у табели са груписаним подацима.
- Одреди модални разред.
- Одреди разред који садржи медијану.

Решење:

- Групишемо податке у интервале са истим дужинама представљамо их у табели:

Време (минута)	Број ученика
6 – 10	4
11 – 15	6
16 – 20	8
21 – 25	7
26 – 30	5

Модални разред је интервал са највећом фреквенцијом у груписаним подацима

- Модални разред је интервал 16 – 20 минута, јер има највише ученика (8 ученика).
- Разред који садржи медијану је интервал који садржи вредност која се налази у средини ако се подаци поређају по величини. У скупу од 30 података, то ће бити 15. или 16. податак, који се у овом случају такође налази у разреду 16 – 20 минута.

Модални разред се користи када су подаци груписани, а не као мода, која је конкретна вредност у негруписаним подацима.

Ако два или више разреда имају исту највећу фреквенцију, онда подаци имају два (или више) модална разреда.

Пример 3

Ученици из библиотекарске секције спровели су истраживање о броју прочитаних књига из школске библиотеке током првог полугодишта. Они су анкетирали своје школске другове и добили следеће резултате: 0, 1, 2, 0, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 2, 5, 3, 2, 2, 4, 6, 3, 3, 1, 4, 0, 3, 7, 2, 3, 5, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 5, 4, 2, 3, 5.

- Изради табелу са груписаним подацима.
- Нацртај дијаграм фреквенције за груписане податке.
- Тумачи резултате:
 - Који интервал има највећу фреквенцију, односно у ком интервалу највише ученика чита књиге?
 - Шта нам говори најчешћа група о читању књига од стране ученика?
 - Да ли резултати указују на добру навику читања или, ипак, постоји простор за подстицање читања? Објасни своје размишљање.
- Анализа посебних случајева:
 - Постоји ли нека изненађујућа информација у расподели података? На пример, да ли има неочекивано мали број ученика који читају много књига или неочекивано велики број ученика који читају мали број књига или уопште не читају?
 - Који је твој предлог за активности или мере којима би се побољшале навике читања, на основу анализе ових података?

Решење:

а)	Број прочитаних књига	Број ученика (фреквенција)
	0 – 1	8
	2 – 3	20
	4 – 5	10
	6 – 7	2

- б) Цртање стубичастог дијаграма за груписане податке је веома слично као за негруписане, али сада сваки стуб одговара једном интервалу из табеле фреквенције за груписане податке. Сви стубови имају исту ширину, а висина зависи од фреквенције одговарајуће групе података.

- в) Највећу фреквенцију има интервал са бројем прочитаних књига 2 или 3, односно највећи део ученика прочитао је 2 или 3 књиге. Са дијаграма се види да је то највиши стубић, који уједно указује на модални интервал. Код већег броја прочитаних књига, фреквенције су мање, па можемо закључити да резултати указују на то да постоји простор за подстицање читања.



- г) Ако упоредимо висине стубова стубичастог дијаграма (фреквенције), лако ћемо уочити да постоји неочекивано мали број ученика који читају велики број књига у поређењу са ученицима који су прочитали једну или нису прочитали ниједну књигу.

Задатак 2

Груписани подаци за висину ученика (у cm):

- Нацртај стубичасти дијаграм за груписане податке.
- Одреди модалну класу.
- Одреди класу у којој се налази медијана.

Интервал	Фреквенција
150 – 154	3
155 – 159	7
160 – 164	10
165 – 169	5
170 – 174	2

Пример 3

Ученици седмог разреда одлучили су да истраже колико корака дневно у просеку праве. Они су током једне недеље бројали кораке које праве сваки дан и бележили податке. Ради лакше анализе, одлучили су да групишу податке у интервале:

Број корака дневно	Фреквенција (број ученика)
2000 – 3999	4
4000 – 5999	6
6000 – 7999	10
8000 – 9999	8
10 000 – 11 999	5

- Који интервал представља модалну класу података?
- Шта то значи у односу на физичку активност ученика?

Решење:

- Из табеле се види да највећу фреквенцију има интервал 6 000 – 7 999 корака (са 10 ученика). Модална класа је 6 000 – 7 999 корака дневно.
- То значи да највећи број ученика у овом истраживању дневно прави између 6 000 и 7 999 корака. Према препорукама за физичку активност, за здрав живот је добро да ученици праве најмање 10 000 корака дневно. Ови подаци показују да већина ученика треба више да се креће како би побољшали своју физичку активност.

Задатак 3

Илир је урадио истраживање о броју страница које ученици читају за домаћи задатак у току једне недеље. Прикупљене податке је груписао у интервале.

- Колики је укупан број ученика од којих су прикупљени подаци?
- Која је модална класа?
- Донеси закључак о навикама читања ученика.

Интервал	Фреквенција (број ученика)
1 – 10	2
11 – 20	5
21 – 30	8
31 – 40	3
41 – 50	2

Задатак 4

На часу физике ученици седмог разреда извели су експеримент да истраже како различите површине утичу на број одскока лоптице при паду са висине од 1 метар. За сваки од 20 покушаја, ученици су бележили број одскока лоптице.

Резултати (број одскока) су:

3, 4, 4, 5, 3, 3, 6, 4, 5, 4, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 4, 3, 4, 5.

- Представи податке табелом за груписане податке (користи интервале 3–4, 5–6 одскока).
- Нацртај дијаграм.
- Тумачи резултате:
 - Одреди која је модална класа и шта то указује о ефекту површине на одскоке.
 - Објасни шта може да значи ако неки интервал има знатно мању фреквенцију од другог.
 - Размисли како квалитет површине (на пример, глатка или храпава) може да утиче на број одскока.
 - Предложи мере или додатне експерименте који би помогли да се добије јаснија слика о утицају различитих типова површина на одскоке лоптице.

Додатни изазов за експеримент:

Изведи експеримент у коме ће се користити тачно дефинисане површине (на пример, гума, пластика, метал) да би се измерио број одскока лоптице на свакој површини. Анализирај резултате да утврдиш да ли постоји корелација између врсте површине и броја одскока.

Ако су у једној спортској секцији спортисти подељени према броју тренинга недељно, а модална класа је 5–6 тренинга, шта можеш да закључиш о навикама спортиста? Да ли то значи да већина спортиста тренира довољно, превише или премало? Како би искористио тај податак да побољшаш спортске резултате групе?

Прецртај табелу у свесци и попуни је. Дискутирај своје одговоре са својим школским друговима.

Вештина	Потпуно савладано	Делимично савладано	
Груписање података по интервалима			
Цртање дијаграма фреквенције			
Тумачење резултата са дијаграма			
Примена наученог у свакодневним контекстима			

Самосталан рад

1. У музеју у твом граду спроведена је анкета о узрасту посетилаца током једног дана. Подаци су груписани у следеће интервале:

Интервал (узраст)	Фреквенција (број посетилаца)
15 – 24	12
25 – 34	18
35 – 44	10
45 – 54	8
55 – 64	5

- Колико је посетилаца било у музеју тог дана?
 - Колики је ранг сваке класе?
 - Која је модална класа?
 - Шта можеш да закључиш из модалне класе?
2. Један менаџер је желео да повећа зараду своје компаније, али је знао да треба да уложи у маркетинг. Након истраживања улагања у маркетинг у последњих 15 месеци, добијени су следећи подаци:
- | Потрошена средства (динари) | Број месеци |
|-----------------------------|-------------|
| 1 – 10 000 | 1 |
| 10 001 – 20 000 | 2 |
| 20 001 – 30 000 | 4 |
| 30 001 – 40 000 | 7 |
| 40 001 – 50 000 | 1 |
- Нацртај дијаграм фреквенције за груписане податке
 - Одреди модалну класу
 - Пронађи класу која садржи медијану
 - Ако жели да повећа улагање у маркетинг за 15%, по којој мери средње вредности треба да се одлучи — по модалној класи или по класи која садржи медијану?
3. У једном експерименту, група ученика сади 50 семенки исте врсте биљке у различитим условима: са одговарајућом влажношћу и са недостатком воде. Након 30 дана, они мере висине биљака и бележе резултате у сантиметрима.

Одговарајућа влажност:

12 15 12 13 14 9 16 18 20 21
 14 17 12 15 16 22 15 19 24 8
 17 13 14 9 16 18 20 21 9 20
 8 15 13 14 9 16 18 20 21 10
 10 9 12 16 19 8 16 17 24 21

Недостатак воде:

7	9	12	11	10	9	15	8	6	19
4	8	14	15	7	10	12	19	3	11
17	13	9	5	11	6	4	13	9	2
15	13	10	6	9	8	15	20	13	8
9	9	7	13	18	8	6	10	22	5

- Групиши податке по интервалима од 5 cm и изради дијаграм фреквенција за сваки услов.
- Тумачи резултате и објасни какве утицаје имају различити услови на раст биљака.

Додатни изазов: Уради своје истраживање о утицају других фактора на раст биљака.

- Прикупи податке о годишњим падавинама у три различита географска региона: планинском, приморском и равничарском. Групиши податке по интервалима од 100 mm и изради дијаграме фреквенције за сваки регион. Тумачи резултате, при чему ћеш објаснити како географске карактеристике утичу на количину падавина.

Процена и израчунавање аритметичке средине. Поређење два скупа података

Замисли да је твој омиљени спортски тим одиграо неколико утакмица и ти желиш да сазнаш колико поена у просеку осваја по утакмици. Или можда желиш да упоредиш који од двојице спортиста је константнији у својим резултатима. За описивање оваквих ситуација, корисне су аритметичка средина, медијана, мода и ранг. У овој лекцији ћеш научити како да процениш аритметичку средину из података приказаних дијаграмима, а затим да провериш своју процену израчунавањем. Такође, поредићеш два различита скупа података користећи различите методе. Ове вештине ће ти помоћи да анализираш информације и доносиш боље одлуке у свакодневном животу.



Пример 1

У датој табели је приказано колико су књига прочитали 15 ученика током летњег распуста:

- а) Која је мода за ове податке?
- б) Одреди медијану.
- в) Одреди ранг података.

Број књига	Број ученика
1	2
2	3
3	5
4	3
5	2

Решење:

Мода: 3 (5 ученика прочитало по 3 књиге), медијана: 3, ранг: $5 - 1 = 4$

Мода је вредност која се најчешће појављује у датом скупу података.

Медијана је вредност средњег елемента у уређеном скупу података. Ако је број података непаран, медијана је средњи број. Ако је број података паран, медијана је просек од два средња броја.

Ранг скупа података је разлика између највеће и најмање вредности у скупу.

Задатак 1

Амра је мерила време 40 својих другара који су учествовали у трци на 100 метара:

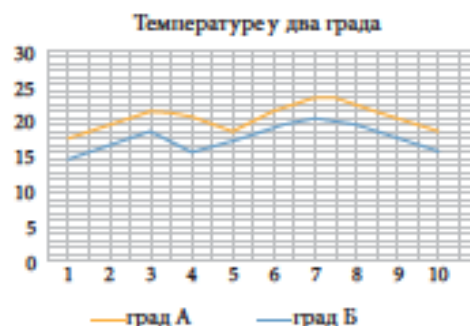
- а) Одреди модалну класу.
- б) Ако уредимо времена, у ком интервалу би се налазила медијана?

Време (секунде)	Број ученика
12 - 14	4
15 - 17	10
18 - 20	15
21 - 23	8
24 - 26	3

Пример 2

На следећем линијском дијаграму приказане су просечне дневне температуре (у °C) у два различита града А и Б током 10 дана.

- а) Процени аритметичку средину температура у граду А и граду Б на основу дијаграма.
- б) Израчунај тачну аритметичку средину за сваки град и упореди је са својом проценом.



- в) Одреди медијану за сваки град.
- г) Одреди моду за сваки град, ако постоји.
- д) Одреди ранг температура за сваки град.
- ђ) Који град има стабилније температуре? Објасни свој одговор на основу израчунатих вредности.

Решење:

- а) Процена аритметичке средине

Град А: Вредности су између 18 и 24, па је процењена средина око 21 °C.

Град Б: Вредности су између 15 и 21, па је процењена средина око 18 °C.

- б) Израчунавање аритметичке средине

Аритметичка средина је количник збира свих података и броја сабирака.

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{Град А: } \bar{X}_A = \frac{18+20+22+21+19+23+24+22+20+19}{10} = 20,8^\circ\text{C}$$

$$\text{Град Б: } \bar{X}_B = \frac{15+17+19+16+18+20+21+20+18+16}{10} = 18^\circ\text{C}$$

- в) Медијана:

$$\text{Град А: } 18, 19, 19, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 24 \rightarrow \text{медијана} = \frac{20+21}{2} = 20,5^\circ\text{C}$$

$$\text{Град Б: } 15, 16, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21 \rightarrow \text{медијана} = \frac{18+18}{2} = 18^\circ\text{C}$$

Пошто постоји паран број података, медијана је аритметичка средина од два средња податка (они који се налазе у средини у уређеном низу података).

- г) Мода

Град А: 19, 20 и 22 се појављују по два пута $\rightarrow$ мода = 19, 20 и 22 (ово је пример када скуп података има више од једне моде)

Град Б: 16, 18 и 20 се појављују по два пута $\rightarrow$ мода = 16, 18 и 20

- д) Ранг

Град А: $24 - 18 = 6^\circ\text{C}$; Град Б: $21 - 15 = 6^\circ\text{C}$

- ђ) Поређење температура у два града

Град А има вишу аритметичку средину ($20,8^\circ\text{C}$ у односу на $18,0^\circ\text{C}$).

Град Б има ниже температуре, али исти ранг температура (6°C).

Промене у температурама су сличне у оба града јер је вредност ранга иста.

Иако оба града имају исти температурни ранг, Град А генерално има топлију климу.

Задатак 2

Једна школа је спровела тестирање медијске писмености у 2 одељења 7. разреда. Из сваког одељења су насумично тестирани по 10 ученика, а следећа табела приказује добијене резултате (поени од 0 до 10).

Табела: Резултати са теста за медијску писменост

Ученик	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7 А	6	8	5	7	6	9	8	6	7	5
7 Б	7	6	9	8	6	5	9	7	6	8

- Процени аритметичку средину резултата за оба одељења.
- Израчунај тачну аритметичку средину за свако одељење и упореди је са својом проценом.
- Које одељење има већу медијану?
- Одреди ранг резултата за свако одељење.
- Које одељење има равномернију расподелу резултата? Објасни.

Пример 3

Група ученика седмог разреда обавила је мерења брзине бициклиста који возе на бициклическој стази поред школског дворишта. Они су измерили брзине (у km/h) код 10 бициклиста и организовали податке у следећој табели:

Бициклиста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Брзина (km/h)	12	15	14	13	15	17	16	14	15	18

- Процени аритметичку средину брзина бициклиста.
- Израчунај тачну аритметичку средину брзина.
- Одреди медијану података.
- Који податак је мода за дате податке?
- Одреди ранг података.
- Ако је максимално дозвољена брзина на бициклическој стази 15 km/h, колико је бициклиста премашило ту брзину?
- Шта можеш закључити о безбедности бициклиста и осталих учесника у саобраћају на основу података?

Решење:

- Процена аритметичке средине:
Брзине се углавном крећу од 12 до 18 km/h, а најчешће су око 15 km/h.
Дакле, процењена аритметичка средина је око 15 km/h.
- Израчунавање аритметичке средине:
$$\bar{X} = \frac{12+15+14+13+15+17+16+14+15+18}{10} = 14,9 \text{ km/h.}$$
- Медијана: Поређане брзине: 12, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 17, 18
Средње две вредности су 15 и 15, па је медијана = $\frac{15+15}{2} = 15 \text{ km/h.}$
- Мода: Број 15 km/h се појављује најчешће (3 пута) → мода = 15 km/h.
- Ранг: Ранг = 18 - 12 = 6 km/h.

б) Брзине изнад дозвољене границе (15 km/h):

Вредности изнад 15 km/h: 17 km/h, 16 km/h, 18 km/h

Три бициклисте су премашиле дозвољену брзину.

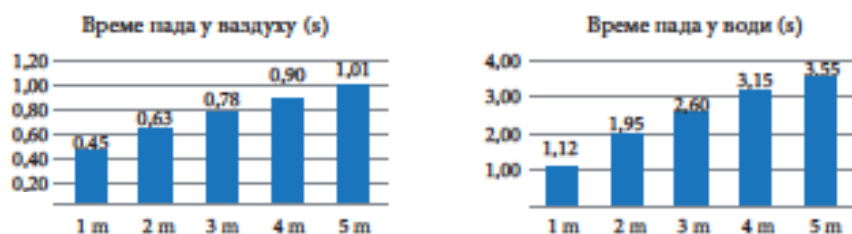
е) Закључак о безбедности:

Просечна брзина је 14,9 km/h, што је врло близу дозвољене границе.

Три бициклисте су премашиле дозвољену брзину, што може представљати потенцијални ризик. Могуће је размотрити мере за побољшање безбедности, као што су постављање знакова за ограничење брзине или подизање свести о ризицима од пребрзе вожње.

Задатак 3

Група ученика у лабораторији за физику пуштају лопту са различитих висина и мере време њеног пада. Експеримент изводе у два различита окружења: ваздух и вода. Подаци из мерења су приказани стубичастим дијаграмима:



- Процени аритметичку средину времена пада у ваздуху и у води на основу дијаграма.
- Израчунај тачну аритметичку средину за сваки случај.
- Одреди медијану времена пада за оба окружења.
- Одреди ранг података за ваздух и за воду.
- Користећи добијене вредности, упореди два окружења. Како утиче окружење на време пада?

Посматрани су временски услови у два различита подручја (планинско и равничарско) у Македонији током једне седмице. У планинском подручју температура је нижа, а падавине чешће, док су у равничарском подручју температуре више, али су падавине ретке. Како би анализирао податке о температури и падавинама у оба подручја у зависности од временских услова? Шта од: аритметичка средина, медијана, мода би користио да процениш разлику? Шта би значило ако је аритметичка средина за температуру у планинском подручју нижа од оне у равничарском, а количина падавина већа? Како ће се то одразити на живот људи у тим подручјима?

„Звездани водич“

Користи пет звездица да оцениш своје разумевање лекције.



- Ништа не разумем.



- Разумем неке основне концепте.



- Разумем већину ствари, али има нешто што ми није сасвим јасно.



- Разумем већину ствари и могу да их објасним другима.



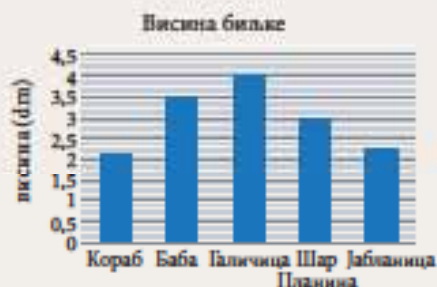
- У потпуности разумем материјал и могу да га применим у различитим ситуацијама.

Запиши број звездица за који мислиш да одражава твоје знање на крају лекције и можеш да додаш кратке коментаре ако ти је потребна помоћ или ако имаш нешто што ти није јасно.

Самосталан рад

1. Подаци о висини биљке папрат на неколико планина у Македонији су приказани на стубичастом дијаграму:

- Процени аритметичку средину за висину папрати.
- Израчунај тачну аритметичку средину.
- Нађи ранг, медијану и моду за висине биљке.



2. Линијским дијаграмом су дати подаци о промени температуре раствора током извођења хемијске реакције.

- Процени аритметичку средину за температуру раствора.
- Израчунај тачну аритметичку средину.
- Упореди резултате за температуру раствора користећи ранг, медијану и моду. Каква је разлика између највише и најниже температуре?



3. У два одељења једне школе измерене су висине неколико ученика. Подаци су приказани у табели испод:

Ученици	Одељење А (висина у cm)	Одељење Б (висина у cm)
Ученик 1	150	155
Ученик 2	160	162
Ученик 3	155	160
Ученик 4	165	168
Ученик 5	158	154

- Процени аритметичку средину висина за свако одељење.
- Које одељење има већу аритметичку средину?
- Упореди податке за висину ученика из оба одељења користећи ранг. Који ученик и из ког одељења је највиши?
- Које одељење има већу медијану за висине?

4. Један ученик је мерио колико воде је пио сваки дан током једне недеље. Подаци су приказани линијским дијаграмом:



- Процени аритметичку средину количине воде коју је ученик попио.
 - Провери процену израчунавањем тачне аритметичке средине.
5. Тимови из два одељења су направили анкету о броју часова које ученици проводе учећи сваке недеље. Резултати су приказани у табели:
- Упореди аритметичке средине два тима.
 - Који тим има више часова проведених у учењу?

Тим	А	Б
Број часова	4, 6, 7, 9, 10	3, 5, 7, 8, 6

6. Марта и Никола су решавали задатке током 4 дана. Подаци су приказани у табели:

Број часова проведених у решавању задатака.

Име	Марта	Никола
Време (h)	3, 5, 2, 7	2, 6, 4, 8

- Користи медијану да упоредиш време које је сваки од њих провео у решавању задатака.
- Ко је од њих имао дужи просечан период решавања задатака?

Исходи. Вероватноћа

Сваког дана доносимо одлуке и предвиђамо шта може да се деси – да ли ће падати киша, да ли ћемо победити у некој игри или да ли ћемо при бацању коцке добити одређени број. Ово су примери вероватноће, која нам помаже да разумемо колико је могуће нешто да се деси. У овој лекцији ћеш научити како да користиш језик вероватноће да би описао и тумачио резултате различитих догађаја.



Учићеш како да идентификујеш све могуће исходе једног догађаја, како да их класификујеш када се међусобно искључују и како да израчунаш вероватноћу када су сви исходи једнаки.

Пример 1

Замисли да си на рођенданској забави и да ти је понуђено да учествујеш у игри са коцком. На свакој страни коцке се налази одређен број тачака (1, 2, 3, 4, 5 или 6). Твој задатак је да предвидиш шта ће се десити на основу ових информација:

- Који су догађаји који ће се сигурно десити, а који је немогуће да се десе?
- Који догађаји имају исту вероватноћу да се десе?
- Дај пример догађаја који имају различиту вероватноћу да се десе.
- Који су сви могући исходи при бацању коцке?

Решење:

- Сигуран догађај је да ће се на горњој страни коцке појавити од 1 до 6 тачака, а немогуће је да се појави више од 6 или мање од 1 тачке.
- Једнако је могуће да се на горњој страни коцке појави паран или да се појави непаран број тачака.
- Догађаји који имају различиту вероватноћу да се десе су, на пример: да се на горњој страни коцке појави мање од 2 тачке или да се на горњој страни коцке појави више од 2 тачке.
- Могући исходи при бацању коцке су: „На горњој страни коцке да се појави 1 тачка“, „На горњој страни коцке да се појаве 2 тачке“, „На горњој страни коцке да се појаве 3 тачке“, „На горњој страни коцке да се појаве 4 тачке“, „На горњој страни коцке да се појаве 5 тачака“, „На горњој страни коцке да се појаве 6 тачака“.

Сваки резултат неког дејства или сваки исход неког експеримента се назива елементарни догађај. Скуп елементарних догађаја се назива догађај.

Елементарни догађаји које са сигурношћу можемо да предвидимо, јер су нам познати сви разлози њиховог настајања, називамо сигурни догађаји. Елементарни догађаји који никада не могу да се догоде називамо немогући догађаји.

Задатак 1

Миле без гледања извлачи једну чарапу из фиоке. Ако се зна да у његовој фиоци има 10 чарапа, од којих су 6 црне, 2 плаве и 2 зелене, одговори:

- Колико могућих исхода постоји при извлачењу једне чарапе из фиоке?
- Који су могући исходи који се међусобно искључују? Објасни их.
- Који је сигуран догађај при извлачењу чарапе из Милетове фиоке, а који је немогућ?
- Да ли је иста вероватноћа да Миле извукао црну или зелену чарапу? Да ли је иста вероватноћа да извукао плаву или зелену чарапу? Објасни зашто.

Пример 2

Матеј и Софија играју игру са точком среће. Точак је подељен на 4 црвена, 3 плава и 3 жута поља. На њему се налази казаљка, тако да након окретања точка казаљка показује на неку од боја.

- Наведи све исходе који могу да се добију при окретању точка?
- Колика је вероватноћа да казаљка стане на црвено поље?
- Колика је вероватноћа да казаљка стане на зелено поље?
- Колика је вероватноћа да ће казаљка стати на црвено, плаво или жуто поље?
- Колика је вероватноћа да казаљка стане на плаво или жуто поље?
- Који су могући исходи који се међусобно искључују? Објасни их.

Вероватноћа догађаја је бројчана вредност која изражава шансу или вероватноћу да ће се одређени догађај догодити. То је број између 0 и 1, где 0 означава да је догађај немогућ, а 1 да је догађај сигуран.

Вероватноћа догађаја се израчунава као однос броја повољних исхода према укупном броју могућих исхода у одређеном експерименту, односно:

$$\text{вероватност} = \frac{\text{број повољних исхода}}{\text{укупан број могућих исхода}}$$

Решење:

- а) Могући исходи при окретању точка: „Казалка се зауставља на црвеном пољу“, „Казалка се зауставља на плавом пољу“ и „Казалка се зауставља на жутом пољу“.
- б) Вероватноћа да се казалка заустави на црвеном:
Број црвених поља (повољни исходи) = 4
Укупан број поља = $4 + 3 + 3 = 10$
Вероватноћа (црвено поље) = $\frac{\text{број повољних исхода}}{\text{укупан број могућих исхода}} = \frac{4}{10} = 0,4(40\%)$
- в) Вероватноћа да се казалка заустави на зеленом пољу:
Број зелених поља (повољни исходи) = 0
Вероватноћа (зелено поље) = $\frac{0}{10} = 0 \rightarrow$ немогућ догађај
- г) Пошто је догађај „Стрелица да стане на плаво или црвено или жуто поље“ сигуран догађај, односно у сваком случају стрелица ће стати на поље са једном од боја које се налазе на точку, вероватноћа је 1, односно:
Вероватноћа (плаво, црвено или жуто поље) = $\frac{(4+3+3)}{10} = \frac{10}{10} = 1(100\%) \rightarrow$ сигуран догађај
- д) Вероватноћа да стрелица стане на плаво или жуто поље:
Број плавих поља = 3, број жутих поља = 3, укупан број повољних исхода = $3 + 3 = 6$
Вероватноћа (плаво или жуто поље) = $\frac{6}{10} = 0,6(60\%)$
- ђ) Исходи који се међусобно искључују су, на пример, да стрелица истовремено стане на плаво и црвено поље (према дефинисаним исходима, стрелица може да покаже само на једно поље).

Исходи који се међусобно искључују су исходи који не могу да се догоде истовремено.

Подједнако вероватни исходи су исходи који имају једнаку вероватноћу да се догоде.

Задатак 2

У једној кутији има 12 лоптица: 4 су црвене, 3 зелене, 2 жуте и 3 плаве. При једном извлачењу се вађа само једна лопта из кутије.

- а) Колико могућих исхода има при извлачењу једне лоптице из кутије?
б) Који су могући исходи који се међусобно искључују? Објасни их.
в) Колика је вероватноћа да извучеш зелену лоптицу?
г) Уколико извадите лоптицу и она је жута и не враћате је у кутију, колика је вероватноћа да извадите црвену лоптицу?

Задатак 3

Ана и Бојан играју игру са две коцке. Када баце обе коцке, сабирају добијене бројеве (број поена који се појавио на горњој страни коцке).

Победник је онај ко добије збир 10 или већи.

Ана каже: „Имам велике шансе да победим!“

Бојан каже: „Мислим да је једнако могуће да добијемо збир 10 или не!“

- Које могуће збирове је могуће добити при бацању две коцке?
- Колика је вероватноћа да збир буде 10 или већи?
- Да ли је Ана у праву када каже да има велике шансе да победи?

Пример 3

Марко ујутру гледа временску прогнозу која показује да постоји 0,7 (70%) вероватноћа за кишу током дана. Он размишља: „Да ли да понесем кишобран са собом или не?“ Његов друг Виктор му каже: „Не носи кишобран, има 30% шансе да не пада!“

- Како да разумемо вероватноћу 0,7 да падне киша?
- Колика је вероватноћа да не пада киша?
- Шта би ти саветовао Марку – да понесе кишобран или не?

Решење:

- Вероватноћа за кишу је 0,7 (70%), што значи да су шансе да пада веће.
- Ова два исхода се међусобно искључују, па је вероватноћа да НЕ пада киша $1 - 0,7 = 0,3$ (30%), што значи да је мања шанса да остане суво.
- Вероватноћа за кишу је већа од 50%, што значи да је паметније Марку да понесе кишобран!

Шта си научио из примера?

- Вероватноћа нам помаже да доносимо боље одлуке у свакодневном животу.
- Мали ризик (као у примеру са ношењем кишобрана) може да нам помогне да избегнемо велики проблем (да се покисне).

Када су шансе за појаву догађаја веће од 50%, онда се догађај сматра вероватним. То значи да је вероватноћа догађаја већа од 0,5, што указује на то да догађај има већу шансу да се догоди него да се не догоди.

Задатак 4

Марко и Јована играју игру са две различите коцке. На свакој коцки су означени бројеви од 1 до 6. Сваки од њих истовремено баца обе коцке. Ко има већу вероватноћу да победи ако: Марко при бацању обе коцке треба да добије збир већи од 7, а Јована збир мањи или једнак 7?

У којим ситуацијама у свакодневици користимо вероватноћу за доношење одлука? Да ли можеш да даш примере?

Ако у једној школи постоји вероватноћа од 0,8 да ће се ускоро одржати такмичење из математике, како би протумачио ту информацију? Да ли треба да се припремиш?

Во тетратка препиши ја и пополни ја табелата.

Тврдње	Не могу	Могу делимично	Могу у потпуности
Одређујем вероватноћу на основу једнако вероватних исхода у едноставним задацима.			
Могу да користим бројеве од 0 до 1 да бих описао вероватноћу.			
Могу да идентификујем сие могуће исходе који се меѓусобно исклучују у једном догађају.			
Могу да дам пример из стварног живота где ми вероватноћа помага да донесем одлуку.			

Самосталан рад

- Колика је вероватноћа да се при бацању играће коцке на горњој страни појави паран број, а колика је вероватноћа да се појави непаран број?
 - Да ли догађаји „На горњој страни коцке појавио се број 1 или 2“ и „На горњој страни коцке појавио се број 5 или 6“ имају исту вероватноћу да се догоде? Објасни.
 - Који догађај има већу вероватноћу: „На горњој страни коцке појавио се паран број“ или „На горњој страни коцке појавио се број најмање 2“?
- Изабери насумичан број између 1 и 10.
 - Колико има могућих исхода?
 - Да ли је једнака вероватноћа да буде изабран паран или непаран број?
- Изабери насумичан број између 1 и 25.
 - Колико има могућих исхода?
 - Колика је вероватноћа да буде изабран прост број?
 - Наведи пример исхода који се меѓусобно исклучују.
 - Да ли исход „Изабран је непаран број“ исклучује исход „Изабран је прост број“?

4. Играш игру са бацањем коцке. Ако се при бацању на горњој страни коцке појави 6 тачака, освајаш награду. Ако се, пак, на горњој страни појави број тачака мањи од 6, губиш.
- а) Какав је однос вероватноћа за победу и пораз?
- б) Да ли је ова игра фер? Објасни зашто.
- в) Ако организатор жели да игру учини праведнијом, како може да промени правило?
5. У једном плесном клубу чланује 50 чланова. Чланови тренирају према узрасту — млади до 18 година и одрасли преко 18 година. У табели је дато колико чланова има према полу и узрасту.

Табела – Број чланова у клубу према полу и узрасту:

	Младо лице	Одрасло лице
Жени	15	10
Мушкарци	12	13

Ако се случајно изабере један члан, колика је вероватноћа да буде:

- а) жена б) одрасли мушкарац
в) младо лице г) млада жена

Експериментална и теоријска вероватноћа

У овој лекцији ћеш се упознати са појмом експерименталне вероватноће, као и са начином њеног израчунавања. Моћи ћеш да уочиш разлике између експерименталне и теоријске вероватноће и да правиш поређења у једноставним ситуацијама. Такође, када прикупиш податке током извођења неког експеримента, научићеш како да их искористиш да израчунаш вероватноћу за догађаје који су се догодили, а затим ћеш моћи да их упоредиш са теоријским проценама.

Ово знање ће ти помоћи да разумеш како функционишу вероватноће и да научиш како да их користиш у стварном животу.



Пример 1

У кутији има 4 лопте различитих боја: црвена, жута, зелена и плава. Ти треба да извучеш по једну лопту из кутије.

- а) Која је вероватноћа да је извучена лопта црвена?
- б) Која је вероватноћа да је извучена лопта жута?
- в) Која је вероватноћа да је извучена лопта зелена?
- г) Која је вероватноћа да је извучена лопта плава?

Решење:

Пошто у кутији има 4 лопте и од сваке боје има по једна, сви исходи су подједнако вероватни и међусобно искључујући. Вероватноћа за сваки исход је $\frac{1}{4}$.

Задатак 1

На полици у соби Јоване има 3 књиге поезије, 5 књига трилера и 7 књига стручне литературе. Јована жели да чита трилер. Израчунај вероватноћу да ће једним случајним извлачењем књиге са полице погодити свој читалачки укус.

Пример 2

У кутији има 3 црвене и 2 зелене лопте. Извлачиш једну лопту без гледања.

- а) Израчунај теоријску вероватноћу да извучеш црвену лопту.
- б) Изведи експеримент: 10 пута извучи по једну лопту из кутије са враћањем и забележи резултате.
- в) Израчунај експерименталну вероватноћу за извлачење црвене лопте на основу резултата експеримента.
- г) Упореди теоријску и експерименталну вероватноћу.

Решење:

- а) Теоретска вероватноћа = $\frac{\text{број повољних исхода}}{\text{укупан број исхода}}$

Број повољних исхода је 3 јер у кутији има 3 црвене лопте, док је укупни број исхода 5 (укупни број лопти у кутији).

Дакле, теоретска вероватноћа (црвена лопта) = $\frac{3}{5} = 0,6(60\%)$.

- б) При извођењу експеримента добили смо следеће резултате при извлачењу лопте 10 пута без гледања и са враћањем извучене лопте у кутију:

Извлачење	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Топка/Лопта	црвена	зелена	црвена	црвена	зелена	црвена	црвена	црвена	зелена	црвена

Дакле, од укупно 10 извлачења, 7 пута је извучена црвена лопта.

$$\text{Експериментална вероватноћа} = \frac{\text{број успешних исхода}}{\text{укупан број исхода}}$$

- в) Према добијеним резултатима експеримента, имамо 7 успешних исхода од укупно 10 покушаја, односно експериментална вероватноћа $= \frac{7}{10} = 0,7(70\%)$
- г) Поређење теоријске и експерименталне вероватноће:
У овом примеру теоријска вероватноћа је 0,6, док је експериментална вероватноћа 0,7. Иако је експериментална вероватноћа мало већа од теоријске, то је сасвим у реду. То је због чињенице да експерименти могу давати различите резултате сваки пут када се изводе. Са повећањем броја извлачења, вредност експерименталне све више ће се приближавати вредности теоријске вероватноће.

Када бисмо поновили експеримент 20, 30, 40... пута, добијали бисмо различит број успешних исхода, али количник између успешних исхода и укупног броја покушаја биће вредност близу теоријске вероватноће, односно 0,6.

Задатак 2

Играј игру са коцком која са сваке стране има различит број тачака: 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

- Израчунај теоријску вероватноћу да се после једног бацања коцке на горњој страни појави број 3.
- Изведи експеримент: баци коцку 20 пута и забележи резултате.
- Израчунај експерименталну вероватноћу да на горњој страни коцке буде 3 тачке према резултатима експеримента.
- Упореди теоријску и експерименталну вероватноћу.

Пример 3

Лена и њени пријатељи се такмиче у бацању новчића. Такмичење се састоји од 50 бацања новчића. Лена жели да израчуна вероватноћу да добије „писмо“ након 50 бацања новчића и да ту вероватноћу упореди са теоријском вероватноћом.

- Израчунај теоријску вероватноћу да падне „писмо“ при једном бацању новчића.
- Лена баца новчић 50 пута. У резултатима добија 22 пута „писмо“ и 28 пута „грб“.
Израчунај експерименталну вероватноћу да падне „писмо“.
- Упореди теоријску и експерименталну вероватноћу.

Решење:

- а) Кованица има два једнако вероватна исхода: „глава“ или „писмо“. Тада теоретска вероватноћа да падне „писмо“ је $\frac{1}{2} = 0,5$.
Теоретска вероватноћа да падне „глава“ при једном бацању је 0,5 или 50%.
- б) Лена је бацила ковануцу 50 пута и добила је 22 пута „писмо“ и 28 пута „глава“.
Експериментална вероватноћа да добије писмо = $\frac{22}{50} = 0,44$ или 44%
- в) Поређење теоретске и експерименталне вероватноће:
- Теоретска вероватноћа је 0,5 или 50%.
 - Експериментална вероватноћа је 0,44 или 44%.

И овде важи напомена као у примеру 2 за вредност експерименталне и теоретске вероватноће (разлика је резултат случајности која се јавља при ограниченом броју бацања).

Задатак 3

Власник једне живинарске фарме има 100 кокошака. 80 од њих носе бела јаја, а 20 носе браон јаја. Да би утврдио колико јаја у просеку ће имати од сваке врсте, фармер одлучује да направи експеримент.

Фармер прави 5 различитих извлачења (тестова) да види колико често ће извући кокошке које носе бела јаја. У сваком од ових тестова он извлачи 10 кокошака, посматра каква јаја ће свако носити и бележи резултате.

Ево како изгледа његов експеримент:

Прво извлачење 10 кокошака: резултат је 8 од њих носе бела јаја, а 2 носе браон.

Друго извлачење: 7 белих јаја и 3 браон;

Треће извлачење: 9 белих јаја и 1 браон;

Четврто извлачење: 8 белих јаја и 2 браон;

Пето извлачење: 6 белих јаја и 4 браон.

Након ових 5 различитих тестова, фармер сабира све резултате за бела и браон јаја и користи их да израчуна експерименталну вероватноћу.

- а) Израчунај теоретску вероватноћу да се извуће кокошка која ће носити бела јаја и теоретску вероватноћу да се извуће кокошка која ће носити браон јаја.
- б) Израчунај експерименталну вероватноћу након сваких 5 тестова.
- в) Анализирај и упоређи резултате теоретске и експерименталне вероватноће. Објасни каква би била вероватноћа за извлачење кокошке која ће носити браон јаја и зашто.
- г) Анализирај и упоређи резултате теоретске и експерименталне вероватноће. Објасни каква би била вероватноћа за извлачење кокошке која ће носити браон јаја и зашто.

Шта би се десило ако фармер направи 100 покушаја уместо само 5? Како би се резултат променио у односу на теоретску вероватноћу од 80% за бела јаја?

Процени свој рад, размисли о томе шта си научио/научила и како си применио/применила појам вероватноће.

1. Могу ли да објасним разлике између ове две врсте вероватноће? (Да/Не)
2. Када израчунавам експерименталну вероватноћу, могу ли да је упоредим са теоретском? (Да/Не)
3. Да ли знам везу броја покушаја које ћу направити при експерименталној вероватноћи са вредношћу теоретске вероватноће? (Да/Не)
4. Да ли боље разумем принципе вероватноће након овог часа? (Да/Не)

Ако си одговорио/одговорила са „Да“ на већину питања, то значи да си успешно разумео/разумела и применио/применила лекцију. Ако имаш одговоре „Не“, размисли шта ти није јасно и посвети време понављању тих делова лекције.

Самосталан рад

1. Марко игра игру са коцком са бројевима од 1 до 6. Он баца коцку 20 пута. Током покушаја добио је следеће резултате:
 Једна тачка на горњој страни коцке: 3 пута
 2 тачке: 4 пута
 3 тачке: 5 пута
 4 тачке: 4 пута
 5 тачака: 2 пута
 6 тачака: 2 пута
 - а) Израчунај теоретску вероватноћу да се сваки број тачака појави на горњој страни при једном бацању коцке.
 - б) Израчунај експерименталну вероватноћу за сваки број на основу података из експеримента.
 - в) Упореди вероватноће из тачке а) и б). Шта закључујеш?
2. Марија је 10 пута бацила новчић. Том приликом, у 6 случајева на горњој страни новчића се појавило „писмо“, а у 4 случаја „глава“.
 - а) Израчунај теоретску вероватноћу да се при једном бацању на горњој страни појави једна од страна: „писмо“ и „глава“.
 - б) Израчунај вероватноћу за појављивање сваке стране новчића према резултатима бацања које је урадила Марија.
 - в) Упореди вероватноће. Објасни зашто се појављује та разлика?



3. Марко је одлучио да купи кафу са апарата који има три опције: макијато, еспресо и капучино. На аутомату за кафу постоје три опције: макијато, еспресо и капучино. Претпостави да су све опције једнако вероватне.
- а) Израчунај теоријску вероватноћу за сваку опцију (као разломак и процент).
У последњих 100 избора са аутомата, макијато је изабран 40 пута, еспресо 30 пута, а капучино 30 пута.
 - б) Израчунај експерименталну вероватноћу за сваку опцију (као разломак и процент).
 - в) Упореди теоријске и експерименталне вероватноће. Да ли се експерименталне приближавају теоријским? Објасни кратко.
4. Наташа се припрема за излазак са пријатељима. У свом ормару има више комада одеће у 3 различите боје: 2 црвена, 3 зелена и 5 жута.
- а) Израчунај теоретску вероватноћу да изабере сваку од боја одеће.
 - б) Направи експеримент са 20 избора одеће. После сваког избора, комад одеће се враћа у ормар. Израчунај експерименталну вероватноћу. (Направи симулацију извлачењем папирића из кутије на којима је записана боја одеће.)
 - в) Упореди теоретску и експерименталну вероватноћу и размисли о разликама између вероватноћа.
5. Истражи како и колико су укључене експериментална и теоретска вероватноћа при припреми временске прогнозе.

